DIE NATURWISSENSCHAFTEN

Vierzehnter Jahrgang | 3. September 1926 | Heft 36

Bernhard Riemann und die Mathematik der letzten hundert Jahre[1]).

Von R. COURANT, Göttingen.

Es ist mir bei diesem Kursus die Aufgabe zugefallen, Ihnen heute in einem einleitenden Vortrage eine Skizze von den Kräften und Bewegungen zu geben, als deren Produkt die gegenwärtige Mathematik und mathematische Physik erscheint, und welche für uns in dem Namen BERNHARD RIEMANN ihr reinstes Symbol finden.

Zeit und Ort dieser Veranstaltung stehen in enger Beziehung zu RIEMANN. Es sind gerade 100 Jahre her, daß er als ein Sohn des niedersächsischen Landes geboren wurde. Göttingen ist der Ort gewesen, wo er studiert und promoviert hat, wo er seine akademische Laufbahn als Privatdozent begann und wo er sehr bald darauf Professor wurde, bis er frühzeitig einer tückischen Lungenkrankheit erlag.

Aber diese mehr äußeren Beziehungen allein rechtfertigen das Thema meines Vortrages nicht. Wenn ich RIEMANN in den Mittelpunkt einer Betrachtung über die Entwicklung der Mathematik unseres Zeitalters stelle, so geschieht dies allein deswegen, weil für jede tiefer dringende historische Einsicht RIEMANN als die schlechthin entscheidende Figur dieser Epoche erscheinen muß.

Warum aber überhaupt eine historische Betrachtungsweise von Dingen der Mathematik oder der Naturwissenschaften? — so wird vielleicht mancher fragen. Liegt nicht eine spezifisch unhistorische Einstellung im Wesen unserer Wissenschaften, in denen alles durch Logik oder durch Experiment nachweisbar ist, in denen nichts Geltung hat als systematische Zusammenhänge und in denen jede Willkür verpönt erscheint? Ist in unserer wissenschaftlichen Interessensphäre Platz für eine Betrachtung der Zufälligkeiten einer historischen Entwicklung?

Ich glaube, daß wir heute mehr denn je eine solche historische Einstellung brauchen. Außerordentlich viel hängt für unsere Wissenschaften davon ab, ob und wie ihre Vertreter es verstehen, sich selbst und den Kreis ihrer Wirksamkeit als Glieder einer großen Entwicklungsreihe zu betrachten, und in welchem Maße sie imstande sind, aus dem Bewußtsein dieser Zusammenhänge für Gegenwart und Zukunft zu lernen.

Freilich muß eine solche historische Betrachtung alles andere eher sein als eine bloße Registrierung von Tatsachen und Daten. Die gähnende Langeweile derartiger Geschichtsschreibung exakter Wissenschaften ist ein Vielfaches der Schrecknisse, die mancher von uns als Schüler in einem schlechten Geschichtsunterricht durchlebt hat. Auch biographische Anekdoten für sich allein können aus dem Kreise rein menschlicher Teilnahme nicht in das Reich historischer Erkenntnis hinüberführen.

Warum gerade heute dieses Bedürfnis nach geschichtlicher Betrachtung? Gewiß, wir leben in einer Zeit, wo es in unseren Wissenschaften mit Macht vorwärts geht. Vieles geschieht weithin sichtbar in der Physik und manches mehr still und verborgen in der Mathematik. Und dennoch ist das organische gesunde Wachsen auf das schwerste bedroht von den Gefahren des Spezialistentums. Ich will gar nicht mehr davon sprechen, daß die Physik und Astronomie sich von der Mathematik, die Technik sich von der Physik getrennt hat; aber auch innerhalb der einzelnen Fächer ist oft spezialistische Höchstleistung mit denkbar größter allgemeiner Unbildung verbunden; Fachgenossen aus Nachbargebieten verstehen einander nicht mehr; Geometer und Analytiker, theoretische und experimentelle Physiker stehen einander häufig teilnahmslos gegenüber und arbeiten mit Leidenschaft und Erfolg auf ihrem Gebiet, ohne sich der Zusammenhänge des Ganzen bewußt zu sein und ohne über die Frage nachzudenken: Woher und wohin?

Wir müssen demgegenüber lernen, die natürlichen Ziele der wissenschaftlichen Entwicklung zu sehen oder wenigstens zu ahnen, und wir müssen lernen, unsere Kräfte bewußt in den Dienst der Aufgabe zu stellen, diese Ziele so geradlinig wie möglich zu erstreben.

Statt dessen droht immer mehr die Gefahr, daß alles planlos treibt, daß der zusammengeraffte Strom zielstrebender Entwicklung sich in ein turbulentes, wirbelnd zerfließendes Chaos auflöst.

Ein großer Teil der heutigen Mathematiker und Physiker kommt mir vor wie der durchschnittliche moderne Mensch, welcher glaubt, auf Grund der Lektüre von Provinzzeitungen politische Ansichten haben zu können oder gar aktiv in die Politik eingreifen zu dürfen, während es doch eines tiefen historischen Sinnes bedarf, um zu lernen, was die gestaltenden Kräfte der menschlichen Gesellschaft sind, und wie man das eigene Streben und Wirken mit ihnen in Einklang bringen kann.

Geschichte als die Lehre von den gestaltenden Kräften und als die Kunst, das Notwendige vom Zufälligen zu unterscheiden, ist eine schwierige und fast unlösbare Aufgabe, wenn sie sich auf die Betrachtung der Politik und der allgemein menschlichen Dinge bezieht. Für den engen Interessenkreis einer Wissenschaft — eng im Vergleich mit

[1]) Eröffnungsvortrag bei dem mathematisch-physikalischen Oberlehrerkurs in Göttingen, Juli 1926.

der Fülle des menschlichen Lebens im allgemeinen — könnte die Aufgabe leichter erscheinen. Aber hier tritt als erschwerendes Moment hinzu, daß von dem Historiker eines Wissensgebietes neben dem historischen Instinkt als unerläßliche Voraussetzung tiefste Bekanntschaft mit den Dingen dieses Wissensgebietes selbst gefordert werden muß; wohl darum ist ein wirklicher Historiker der exakten Wissenschaften ein *noch* selteneres Phänomen als ein Historiker der allgemeinen Geschichte.

Unserer Zeit ist das Glück zuteil geworden, einen solchen historischen Geist erleben zu dürfen oder vielmehr einen großen, führenden Gelehrten, dessen Lebenswerk schließlich in eine historische Betrachtung unserer Wissenschaft eingemündet ist. Ich meine FELIX KLEIN, dessen geschichtliche Vorträge, wenigstens in ihrem ersten Teil, sehr bald der Öffentlichkeit vorliegen werden und welche, daran zweifle ich nicht, eine tiefe Wirkung auf die weitesten an unserer Wissenschaft interessierten Kreise auszuüben bestimmt sind. Was ich Ihnen heute in einer kurzen historischen Skizze zu sagen habe, stützt sich in vielem auf diese Vorlesungen von FELIX KLEIN.

Die Mathematik ist wohl die älteste und ehrwürdigste aller Wissenschaften, aber wir dürfen nicht vergessen, daß die Mathematik in ihrer heutigen Gestalt erst auf eine Entwicklung von kaum 300 Jahren zurückblicken kann. Nach den großen entscheidenden Schritten im 17. Jahrhundert, die zur systematischen analytischen Geometrie und Infinitesimalrechnung führten, folgt eine Zeit des raschesten, üppigsten Aufblühens der mathematischen Wissenschaften. Wir sehen im 18. Jahrhundert an verschiedenen Stellen Europas verstreut eine kleine Schar hervorragender Denker, untereinander durch regen Gedankenaustausch verbunden, mit erstaunlicher Energie und überwältigendem Erfolge das Gebäude der exakten Wissenschaften errichten und ausbauen.

Wenn wir Kinder des nervösen, überhasteten, spezialistischen 20. Jahrhunderts uns in die Betrachtung dieser Zeit vertiefen, so frappiert uns vielleicht als der größte Eindruck die Universalität jener Geister. Es waren nicht Fachleute, sondern Repräsentanten der Wissenschaft als eines Ganzen, bahnbrechende Physiker, Mathematiker, Astronomen und anderes mehr in einer Person, und was noch mehr bedeutet, häufig genug überdies große harmonische Persönlichkeiten, die sich des inneren Zusammenhanges *aller* Wissenschaft tief bewußt waren.

Das Kennzeichen dieser Zeit ist eine naive Produktivität. Das neu eroberte Land lockt mit so viel unbetretenen Gegenden, daß der Forschergeist es so rasch wie möglich durcheilen muß, unbekümmert darum, ob der erworbene Besitz schon völlig durchdrungen und gesichert ist. Unklarheiten und Unsicherheiten in den Grundlagen bedrücken die Mathematiker des 18. Jahrhunderts nicht sehr. Fragen nach Konvergenz oder Divergenz spielen keine Rolle. Ein sicherer Instinkt führt fast stets zu richtigen Resultaten.

Der Rahmen, in welchem sich diese Entwicklung abspielt, war der des alten Feudalstaates mit seiner ständischen sozialen Schichtung. Das wissenschaftliche Leben war zunächst allein repräsentiert durch wenige ausgezeichnete Persönlichkeiten, um sich dann auf die Akademien zu konzentrieren, fast ohne Verbindung mit den Universitäten, wo insbesondere die mathematische Wissenschaft eine ganz untergeordnete, kümmerliche Rolle spielte.

Die französische Revolution, welche den Auftakt zur völligen sozialen und politischen Umgestaltung Europas bildete, bezeichnet auch für unsere Wissenschaften den Beginn einer neuen Entwicklungsphase. Es entstehen die modernen Volksstaaten. Die sozialen Bindungen zerreißen, die Wände zwischen den Volksklassen werden niedergerissen, neue Berufs- und Betätigungsmöglichkeiten eröffnen sich jedermann. Unaufhaltsam setzt sich in Europa die Tendenz zur Verbreiterung und Demokratisierung auch in allen Kultur- und Bildungsfragen durch und damit im eigentlichen wissenschaftlichen Leben. Man mag dieser Entwicklung innerlich beistimmen oder ihr mit schmerzlicher Abneigung gegenüberstehen, sie kam und ist gegenwärtig ein entscheidender Faktor der Entwicklung, welche der einzelne nicht hemmen kann.

Den ersten entschiedenen Ausdruck fand diese Tendenz darin, daß die Pflege der Wissenschaften in weitem Maße von den höfischen Akademien an die Universitäten und Hochschulen überging. In Frankreich wurde 1794 die École Polytechnique gegründet, mit dem Prinzip, durch Heranziehung der besten Gelehrten als Lehrer ein möglichst hohes Niveau der Ausbildung zu erzielen. Der überraschende Erfolg dieser Gründung mahnte andere europäische Länder zu Nachahmungen in mehr oder weniger veränderter Form.

In Preußen und anderen deutschen Staaten ging der Anstoß zu einer ähnlichen Entwicklung von der Aufgabe aus, die Oberlehrer für die Gymnasien auszubilden. Die Neuorganisation des Bildungswesens hatte zu Beginn des Jahrhunderts die Schaffung eines besonderen Oberlehrerstandes mit sich gebracht, während früher die Lehrerschaft der höheren Schulen sich aus allen möglichen Kreisen, insbesondere aus der Gruppe der jüngeren Theologen, rekrutierte. Die Universitäten werden nun die gegebenen Stätten zur Ausbildung der Lehrer, und an dieser neuen Aufgabe entwickelt sich im Rahmen der Universitäten überall regstes wissenschaftliches Leben. Für das Gebiet der Naturwissenschaften wird diese Entwicklung in Preußen besonders durch das Eingreifen ALEXANDER VON HUMBOLDTS gefördert, der von seinen Reisen und seinem langen Aufenthalt in Paris die moderne Einsicht in die Notwendigkeit mitbrachte, Forschung und Lehre in die engsten gegenseitigen Beziehungen zu setzen. LIEBIGS Berufung nach

Gießen gegen den Protest der zünftigen Fakultät z. B. ist HUMBOLDTS Werk. Wir wissen, was diese Berufung für die Entwicklung der Chemie bedeutet hat; von ähnlicher entscheidender Wichtigkeit für die Mathematik wurde die Ernennung von JACOBI zum Professor in Königsberg — eine Ernennung, die ebenfalls auf Betreiben von HUMBOLDT und gegen den Widerstand der Fakultät erfolgte.

JACOBI war der erste, welcher in der Mathematik bewußt und leidenschaftlich das Prinzip durchführte, in Universitätsvorlesungen und Seminaren die Hörer bis an die Grenze der wissenschaftlichen Forschung mitzuführen und ihnen den Zutritt zur Werkstatt der wissenschaftlichen Produktion weit zu öffnen. Mit einer hinreißenden Lehrbegabung, mit einer blendenden Vielseitigkeit und Produktivität, mit einer rücksichtslosen gewalttätig-suggestiven Kraft gelang es ihm in kurzer Zeit, hier eine ganz neue, in den exakten Fächern bis dahin wenigstens in Deutschland unerhörte Tradition zu schaffen. Der Ruhm seiner Vorlesungen und seines wissenschaftlichen Betriebes verbreiteten sich rasch. Das Beispiel der Königsberger Schule erobert der JACOBIschen Lehrtradition bald alle wichtigen Universitäten und bestimmt so das Niveau der Anforderungen, welche heute überall an die wissenschaftliche Ausbildung der höheren Lehrer gestellt werden. Zugleich ergibt sich für die Wissenschaft selbst eine so starke Verbreiterung der Basis, wie man sie wenige Jahrzehnte vorher kaum erträumen konnte.

Große Mathematiker der späteren Generation gehen aus dem Kreise der Oberlehrer hervor, die mittelbar oder unmittelbar aus der JACOBIschen Schule herauswachsen; ich nenne als Beispiel WEIERSTRASS.

Aber die Verbreiterung des Betriebes der wissenschaftlichen Mathematik — und diese Erscheinung ist auch typisch für alle Nachbargebiete — geht Hand in Hand mit einer fortschreitenden Spezialisierung. Die Zahl derer, die glauben, auch ein Scherflein zum Fortschritt der Wissenschaft beitragen zu müssen, wächst ständig, und noch größer wird die Anzahl derjenigen, die um jeden Preis aus äußeren oder inneren Gründen wissenschaftlich publizieren wollen. Während das 18. Jahrhundert, das Zeitalter des Briefschreibens, nur kümmerliche Publikationsmöglichkeiten und geringe Publikationsbedürfnisse kannte, wächst in unserem Zeitalter des Telegraphierens die Literatur an Zeitschriften und Büchern ins Ungemessene und Unübersehbare. Ich gestehe, daß ich keinem mir bekannten Mathematiker die Fähigkeit zutraue, ohne Schwierigkeiten auch nur den fünften Teil alles dessen zu lesen, was in einer Zeitschriften- oder Monographienserie gedruckt wird. Ob die Wissenschaft darunter leiden würde, wenn vier Fünftel ungedruckt bliebe, weiß ich nicht. Aber wir ersticken an dem Chaos von Papier und Druckerschwärze, wir verzagen vor der Zersplitterung der Wissenschaft in Spezialitäten, und wir verzweifeln an der babylonischen Sprachverwirrung, welche uns verhindert, die Rede unseres nächsten Fachgenossen zu verstehen.

Und doch ist es nicht wahr, daß die Wissenschaft rettungslos der Auflösung in Spezialistentum verfallen ist. Sie selbst besitzt in sich die Kräfte zu einer lebendigen, gesunden Weiterentwicklung. Für die Mathematik werden, so glaube ich, diese weitertreibenden Lebenskräfte durch den Namen RIEMANN verkörpert. Nicht bloß durch den tatsächlichen Inhalt dessen, was RIEMANN geschrieben und gelehrt hat, sondern mehr noch durch die Geistesrichtung, welche in RIEMANN ihren reinsten Ausdruck findet. Um diese These heute im allgemeinen zu begründen — in den beiden folgenden Vorträgen werde ich mehr im einzelnen auf RIEMANNS Lebenswerk eingehen — muß ich einige weitere historische Bemerkungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert einschalten.

Man hat dieses Jahrhundert das kritische Zeitalter genannt. In der Tat, die souveräne Unbekümmertheit, mit der die aristokratischen Gelehrtennaturen des 18. Jahrhunderts sich über Unklarheiten, Unfertigkeiten und Widersprüche in den Grundlagen hinwegsetzen, mußte der strengeren Gesetzlichkeit des bürgerlichen Zeitalters auch in der Wissenschaft weichen. Auch hier wird überall die Berechtigung des Bestehenden in Frage gezogen und in mühsamster Arbeit die Grundlagen der Wissenschaft, sozusagen ihr geltendes Recht, festgestellt.

GAUSS beginnt mit dem Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra, und jeder von uns kennt die großen Leistungen, die mit der strengen und einwandfreien Begründung der Analysis und Geometrie seitdem vollbracht worden sind. Ich erinnere nur an CAUCHY, durch welchen die Infinitesimalrechnung von allen Beimengungen an Unklarheiten und Mystik befreit und aus einer Art Geheimwissenschaft auserwählter Geister zu einer leicht erlernbaren Kunst gemacht wurde. Ich erinnere an die strenge Grundlegung der Analysis durch BOLZANO, WEIERSTRASS und DEDEKIND; an die Mengenlehre und an die moderne Theorie der reellen Funktionen. Aber wir wissen auch, daß diese Entwicklungslinie vielfach zu einer Überfeinerung und übertriebenen Zuspitzung der Begriffe und schließlich zu uferlosen, abstrakten Begriffsspekulationen zu führen droht. In den Händen direktionsloser Kostgänger der Wissenschaft hat sie eine Gefahr zu bilden begonnen und trägt nicht zum wenigsten die Schuld an dem heutigen krisenhaften Zustande.

Ein weiteres Moment kommt hinzu. Der Wille zur Kritik, der Wille zur unerbittlichen Strenge hat in manchen Gebieten zu einer Verengung des Standpunktes gegenüber dem 18. Jahrhundert geführt. Wenn wir ein militärisches Bild gebrauchen: Man hat viele vorgeschobene Positionen aufgegeben, um die rückwärtigen Verbindungen zu sichern; man hat sich hinter feste Wälle verschanzt und sich freiwillig auf ein kleineres Gebiet beschränkt, um vor Angriffen der Kritik sicher zu bleiben. Viele, auch hervorragende Mathematiker haben die „Strenge" so in Fleisch und Blut aufgenommen, daß ihrem Bewußtsein die Möglichkeit und Notwendigkeit „unstrenger", mehr phantasievoller Betrachtungen völlig abhanden gekommen ist.

Aus dieser Gefahr der Stagnation kann uns nun eben die Entwicklungslinie herausführen, die von RIEMANN ausgeht.

Es ist eine ungerechte Einseitigkeit, wenn man immer nur den kritischen Zug der Mathematik des 19. Jahrhunderts hervorhebt. Große, ja gewaltige schöpferische Gedankenreihen stellen sich neben die mehr kritischen und sind zum Teil eng mit diesen verschlungen. GAUSS, dessen Riesengestalt die beiden Jahrhunderte verbindet und weit ins 19. Jahrhundert hineinragt, hat viele dieser Gedanken als mächtige Impulse ins wissenschaftliche Leben hineingeschleudert. Manches hat er schweigend in seinem Innern bewahrt oder nur andeutungsweise seinen nächsten Freunden eröffnet. Von der ungeheuren Fülle des GAUSSschen Ideenreichtums geben uns vielfach nur kurze Notizzettel Kunde, die erst mehr als ein halbes Jahrhundert nach seinem Tode enträtselt wurden. Es war vielleicht eine Tragik im Leben von GAUSS, daß sein Amt ihn zeitweise zu einer äußerst intensiven und aufreibenden subalternen Arbeit zwang, wie z. B. der eigenhändigen Durchführung der hannoverschen Landesvermessung. Gewiß hat solche Tätigkeit auch wissenschaftliche Früchte getragen; aber wenn man sieht, was alles an mehr oder weniger ausgeführten Entwürfen und großartigen Gedanken von GAUSS niemals zur Veröffentlichung vorbereitet werden konnte, dann liegt für uns in dem Zeitalter der Assistenten und Laboranten und sonstigen Hilfskräfte der Gedanke nahe, daß doch ein ungeheures Kapital von höchster menschlicher Erkenntniskraft sinnlos vergeudet worden ist.

Glücklicherweise ist es aber in der Wissenschaft nicht so, daß jemand, und mag er noch so originell sein, wichtige, für die Wissenschaft lebensnotwendige Gedanken auf immer mit ins Grab nehmen kann. Wenn diese Gedanken auf der Entwicklungslinie der Wissenschaft liegen, dann werden sie früher oder später in einem anderen begnadeten Geiste neu wieder entstehen und von ihm in die Erscheinung gebracht werden. In diesem Sinne ist RIEMANN nach vielen Richtungen der Neuschöpfer und Vollender dessen gewesen, was GAUSS der Welt schuldig geblieben war.

Es wird immer eins der merkwürdigsten Phänomene in der Geschichte der Mathematik des 19. Jahrhunderts bleiben, daß RIEMANN, fast ohne Berührung mit dem alten, nach außen eisigen und verschlossenen GAUSS, ohne die GAUSSschen Gedanken klar gekannt zu haben, dennoch in vielen Punkten so genau an GAUSS anknüpfte. Es ist eben so, als ob die mathematische Atmosphäre mit diesen Gedanken gesättigt war und nur ein empfängliches Medium da sein mußte, in dem sie zum Niederschlag kommen konnten.

RIEMANNS Leistung und Wirkung wird für uns noch bewundernswerter, wenn wir uns von seiner Persönlichkeit und seinem äußeren Leben kurz Rechenschaft geben. Wie so mancher großer deutscher Gelehrte, stammt er aus einem Landpfarrhause. Er kam mit 18 Jahren nach Göttingen, um Theologie zu studieren, erhielt aber bald von seinen Eltern die Erlaubnis, sich seiner Lieblingsbeschäftigung, der Mathematik, widmen zu dürfen, und treibt nun in Göttingen seine mathematischen Studien mit einer zweijährigen Berliner Unterbrechung. Ein stiller, bescheidener, gütiger, ganz in sich gekehrter, versonnener junger Mann, nach außen unbeholfen, schüchtern, weltfremd, mit gelegentlicher Neigung zur Melancholie, die ja kaum einer großen Persönlichkeit erspart zu bleiben scheint, oft seine Kameraden zu Neckereien geradezu herausfordernd. Dabei innerlich erfüllt von intensivstem, reichem Leben. Durchaus als Erscheinung kein Frühreifer. Erst mit 25 Jahren kommt er zur Promotion. Seine ganze innere Einstellung, seine ganze wissenschaftliche Gesinnung ist durch und durch entgegengesetzt derjenigen Richtung, welche in der Mathematik zunächst zur Herrschaft berufen war. RIEMANN ist der typisch geniale intuitive Geist. Sein Interesse verbreitet sich über die ganze Mathematik und Physik, die Philosophie und die Physiologie. Überall spürt er die inneren Zusammenhänge auf. Seine rein mathematischen Untersuchungen sind erfüllt von unmittelbarer physikalischer Anschauung; seine physikalisch-mathematischen Probleme drängen ihn zur Erfindung der feinsten, rein mathematischen Methoden und Hilfsmittel; ein unvergleichlicher Sinn für die großen Zusammenhänge verbindet sich mit größter Kraft und Schärfe bei der Behandlung jeder Einzelheit.

Wollte man ihn als Persönlichkeit in eines der Schemata einreihen, in welche man heute so gern die Vielgestaltigkeit der menschlichen Dinge einzwängt, so würde man in große Verlegenheit kommen. Er war weder typischer Klassiker noch Romantiker, er war weder cyclothym, noch schizothym, und man sieht an diesem Beispiel, wie gefährlich und irreführend die blinde, schlagwortartige Anwendung solcher Unterscheidungen ist. Charakteristisch für seine Persönlichkeit bleibt seine tiefe Religiosität, die ihm ein wunderbares inneres Gleichgewicht gegenüber dem schweren Schicksal verlieh, das ihn früh traf.

Erst drei Jahre nach seiner Promotion, im Jahre 1854, mit fast 28 Jahren, habilitierte er sich in Göttingen. Seine Vorlesungen haben anscheinend wenig Erfolg. Doch erkennen die älteren Fachgenossen recht wohl von Anfang an die Bedeutung des jungen Genies. Er wurde im Jahre 1857 Extraordinarius und im Jahre 1859, nach DIRICHLETS frühem Tode, dessen Nachfolger im Ordinariat. Einige Jahre stiller intensiver Arbeit folgen. Aber schon im Jahre 1862 packt ihn eine

Lungenkrankheit, um ihn bis zu seinem Tode, 1866, nicht mehr loszulassen. Gefaßt und ergeben ist er gestorben, inmitten eines ungeheuren Programms von Entwürfen und Fragmenten, nur eine kleine Anzahl von gedruckten Abhandlungen und eine etwas größere von ungedruckten Manuskripten hinterlassend. Und doch bildet dieser bescheidene Band RIEMANNscher Abhandlungen, die später gesammelt herausgegeben wurden, die Grundlage der weiteren Entwicklung der Mathematik.

Daß RIEMANNS Auftreten doch schließlich eine so tiefe Wirkung üben konnte, mutet uns fast wie ein Wunder an. Nur elf Jahre liegen zwischen seinem ersten Hervortreten in seiner Dissertation und seiner tödlichen Erkrankung. Als Lehrer hatte er wenig Erfolg, und unter seinen wenigen Zuhörern war gewöhnlich keiner, der die vorgetragenen neuen Ideen wirklich auch nur einigermaßen erfassen konnte. Das, was später unter RIEMANNS Namen als Auszug aus dessen Vorlesungen der Öffentlichkeit übergeben wurde, bildet nur einen schwachen Abglanz von der wahren RIEMANNschen Gedankenführung.

Die wenigen Arbeiten, die RIEMANN selbst publizierte, erregten zwar z. T. großes Aufsehen, vor allem die Arbeit über ABELsche Funktionen. Aber ihr innerster Kern war doch der herrschenden Mode zu sehr entgegengesetzt, um sogleich in das allgemeine Bewußtsein der mathematischen Welt aufgenommen zu werden. Angesichts der mächtig in den Vordergrund tretenden WEIERSTRASSschen Schule konnte zunächst der RIEMANNsche Geist nicht aufkommen. (Man vergleiche die Anzahl von fünf bis sechs Zuhöreren von RIEMANN mit der Anzahl von mehreren Hundert in den späteren WEIERSTRASSschen Vorlesungen.) Entscheidend gegen RIEMANN fiel nicht zuletzt ins Gewicht, daß, wie WEIERSTRASS zeigte, in den Grundlagen der RIEMANNschen Funktionentheorie, dem sogenannten DIRICHLETschen Prinzip, eine Lücke klaffte, welche den ganzen Oberbau zu gefährden schien, und deren Schließung man zunächst nicht zu versuchen wagte. Man glaubte, die RIEMANNschen Wege verlassen zu müssen, um RIEMANNS als erstrebenswert erkannten Ziele zu erreichen; und in diesem Sinne wurden dann durch die Bestrebungen von CARL NEUMANN und HERMANN AMANDUS SCHWARZ die ersten strengen Beweise für grundlegende RIEMANNsche Sätze gegeben. Aber es dauerte Jahrzehnte, bis jemand kam, der den Mut und die Kraft fand, unmittelbar an die RIEMANNschen Grundlagen, das DIRICHLETsche Prinzip, heranzugehen und diesem gegen alle Kritik zum Triumph zu verhelfen. Erst im Jahre 1901 glückte HILBERT dieser große Wurf, und von da ab datiert eine neue Entwicklung in dem großen Gebiet der Analysis. Es entstehen die sogenannten direkten Methoden der Variationsrechnung, welche, wie ich glaube, dazu berufen sind, das Gesicht der Analysis weitgehend umzugestalten. Ein Beispiel für die oft bestätigte Wahrheit, daß der Fortschritt der Wissenschaft häufig genug an Unklarheiten und Mängel des Vorhandenen anknüpft.

Daß aber RIEMANNS Lebenswerk zur vollen Wirkung auf die Entwicklung der Mathematik gelangt, das haben wir in erster Linie einem Mann zu verdanken, der uns immer als der größte und erfolgreichste Pionier der RIEMANNschen Sache erscheinen wird, FELIX KLEIN. Er war der erste, der sich, schon als junger Mensch, ganz selbständig und entgegen der herrschenden Mode, in die RIEMANNsche Funktionentheorie vertiefte, sie an vielen Punkten fortführte und mit seiner hinreißend expansiven Art kraftvoll seine Zeit zu den RIEMANNschen Auffassungen geradezu bekehrt hat. Wie dies geschah, das ist im einzelnen anläßlich des Todes von KLEIN jetzt so oft gesagt und geschildert worden, daß ich es heute nicht mehr zu wiederholen brauche.

Aber ich muß doch darauf hinweisen, daß, so wichtig die Funktionentheorie als das „Kernstück" der Mathematik der letzten achtzig Jahre erscheinen mag, so wenig RIEMANNS Bedeutung doch damit erschöpft ist, und daß KLEIN immer nur vorzugsweise diese eine Seite von RIEMANN hervorgehoben und zur Wirkung gebracht hat.

Schon als Funktionentheoretiker weist RIEMANN Züge auf, die außerhalb des Rahmens der von KLEIN vertretenen geometrischen Theorie liegen. Ich erinnere nur an die RIEMANNsche Theorie der ζ-Funktion, welche auf ganz anderer Grundlage ruht, und welche bahnbrechend und richtunggebend für die neuere analytische Zahlentheorie geworden ist. Ich erinnere ferner an die RIEMANNsche Habilitationsschrift über die FOURIERschen Reihen, welche ebenfalls ein ganz neues, später leider bis zum Überdruß abgegrastes Gebiet eröffnet hat.

Neben die funktionentheoretischen Dinge, zu denen ich auch die geometrischen Untersuchungen über Minimalflächen und vor allem die so folgenreichen topologischen Bemerkungen rechne, tritt als zweites großes Arbeitsgebiet von RIEMANN die mathematische Physik, übrigens eng mit der Funktionentheorie verbunden. Hier hat RIEMANN keinen kongenialen Apostel wie KLEIN gefunden. Daher nimmt es nicht wunder, daß seine Gedanken in diesem Gebiet sehr viel längere Zeit gebraucht haben, um nach außen zur Wirkung zu kommen.

Bezeichnend ist, daß eine Preisarbeit über mathematische Physik, die er der Pariser Akademie einreichte, nicht den Preis erhielt, obwohl diese Arbeit lange Zeit ein unausgeschöpftes Bergwerk voll köstlicher Schätze blieb. RIEMANNS Arbeiten über partielle Differentialgleichungen sind erst allmählich, z. B. durch die Vermittlung von WEBER, DARBOUX und VOLTERRA bekannt gemacht und verstanden worden, und erst langsam hat sich daran die große Entwicklung angeschlossen, in der wir noch mitten drin stehen.

Ähnlich geht es mit den tiefen Gedanken, die wir heute mit dem Namen „RIEMANNsche Geometrie" zusammenfassend bezeichnen. Noch bis vor kurzem wurden diese Dinge lediglich von einem ganz engen Kreis als Spezialfach betrieben, bis EINSTEINS Tat plötzlich diese RIEMANNsche Geometrie in das helle Licht der unmittelbarsten Aktualität zog. Heute wissen wir die Größe und Tiefe der RIEMANNschen Leistung von 1861 voll einzuschätzen und erkennen mit dankbarem Staunen, daß auch unsichtbar unter der Oberfläche solche Ideen wirksam und fruchtbar weiter wachsen können, um plötzlich mit Macht ans Licht hervorzubrechen.

Ich will und kann heute auf alle diese Dinge nicht näher eingehen. In den beiden nächsten Vortragsstunden werde ich Gelegenheit haben, die heute nur flüchtig skizzierten Bemerkungen über RIEMANNS Wirkungen etwas näher auszuführen. Heute möchte ich mir noch ein paar kurze Worte gestatten über die Frage, wie RIEMANN auf unseren ganzen wissenschaftlichen Betrieb gewirkt hat, und insbesondere, was RIEMANN für uns hier in Göttingen bedeutet.

Wir haben vorhin gehört, wie durch den Einfluß von JACOBI sich in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts in den meisten deutschen Universitäten das Niveau des mathematischen Betriebes hob. Auch in Göttingen vollzog sich eine solche Entwicklung. Allerdings hat GAUSS, der seit Beginn des Jahrhunderts hier als Professor und Direktor der Sternwarte lebte, daran kaum einen Anteil; er hielt sich von dem eigentlichen Unterricht fast gänzlich fern. So können wir von dem Beginn einer höheren Unterrichtstradition in Göttingen erst im Zusammenhange mit der Berufung von DIRICHLET als GAUSSens Nachfolger sprechen (1855). DIRICHLET, ebenfalls durch die Pariser Schule gegangen, dann vermöge HUMBOLDTS Einfluß erst nach Breslau und bald nach Berlin berufen, vertrat wie JACOBI das Prinzip der Verbindung von Forschung und Lehre. Er war mehr eine stille, feine Gelehrtennatur, nicht stürmisch und gewalttätig sich durchsetzend wie JACOBI, aber seine Eigenart ist doch so groß, daß er gegenüber der eigentlichen JACOBIschen Schule mit dem übersteigerten Spezialstudium der elliptischen Funktionen, in Göttingen eine eigene und neue Unterrichtstradition zu schaffen begann, in deren Mittelpunkt ein Kursus von Vorlesungen über mathematische Physik, partielle Differentialgleichungen und Zahlentheorie stand. Es war allerdings nicht das Gros der Studenten, welche diesen Vorlesungszyklus hörten. Für die große Menge wurden von ULRICH und STERN elementare Vorlesungen gehalten. Aber doch haben DIRICHLETS Vorlesungen eine nachhaltige Wirkung auf den Unterrichtsbetrieb der späteren Zeit gewonnen, obwohl DIRICHLET sehr bald starb, noch bevor diese Tradition Wurzel fassen konnte. RIEMANN, DIRICHLETS Nachfolger im Amt, der schon während seines Berliner Aufenthaltes stark von dem ihm innerlich verwandten DIRICHLET beeinflußt war, schien wie kein anderer geeignet, auch als Lehrer den Platz von DIRICHLET einzunehmen. Was aus unvollkommenen Nachschriften und unvollkommenen Ausarbeitungen von RIEMANNS Vorlesungen über mathematische Physik erhalten worden ist, zeigt uns, in wie wunderbarer und tiefer Weise RIEMANN im Begriffe war, die DIRICHLETsche Tradition fortzusetzen und weiterzubilden, immer unter dem Gesichtspunkt der Einheit von Mathematik und Physik. Aber dem allen wurde durch RIEMANNS Tod ein jähes Ende bereitet.

Es dauerte viele Jahre, bis unter der Führung von FELIX KLEIN auf DIRICHLET-RIEMANNscher Grundlage neu dasjenige entstand, was wir heute als unsere Göttinger Tradition betrachten.

Als Leitmotiv dieser KLEINschen Bestrebungen darf ich die Forderung bezeichnen, daß bei aller Pflege der Einzelheiten niemals der Blick auf das Ganze verloren werden darf, daß das Bewußtsein von der Einheit der Wissenschaft in Forschung und Lehre lebendig bleiben muß.

Gewiß, wir können die Tatsache nicht rückgängig machen, daß die Wissenschaften sich verzweigt haben, daß Physik, Astronomie und Mathematik nicht mehr von einem Geiste repräsentiert werden können. Wir vermögen das ebensowenig zu ändern, wie wir imstande sind, die für die menschliche Kultur so verhängnisvolle Entwicklung des Verkehrswesens zurückzuschrauben. Aber was wir hier in unserem Göttinger Kreise tun können und zu tun bestrebt sind, das ist, in enger brüderlicher Fühlung alle miteinander, Physiker, Mathematiker, Astronomen, in gegenseitigem Verständnis und gegenseitiger wissenschaftlicher Hilfsbereitschaft die Idee von der Einheit der Wissenschaft zu bewahren und unseren Studenten zu übermitteln. Ich hoffe, daß Sie, meine Herren, aus den Tagen dieses Ferienkursus einen Eindruck von dieser Art, die RIEMANNsche Tradition aufrechtzuerhalten, mit sich nehmen werden.

Besprechungen.

SCHOTT, GERHARD, **Geographie des Atlantischen Ozeans.** 2. vollständig durchgearbeitete und erweiterte Auflage. Hamburg: C. Boysen 1926. XVI, 368 S., 1 Titelbild, 27 Tafeln und 115 Textfiguren. 20 × 28 cm. Preis RM 35.—.

Die erste 1912 erschienene Auflage dieses grundlegenden Werkes wurde allgemein als ein völlig neuartiges Unternehmen von bahnbrechender Bedeutung begrüßt, weil hier zum ersten Male die Grundsätze länderkundlicher Darstellung auf einen Ozean zur Anwendung gebracht wurden. In der geographischen Literatur wird zwar in herkömmlicher Weise bei der Behandlung der allgemeinen Erdkunde auch die Wasserhülle der Erde, insbesondere die statischen und dynamischen Verhältnisse des Meerwassers berücksichtigt, aber wir besaßen vor SCHOTT noch keine Monographie eines der großen Ozeane, die ihn als länderkundliches Objekt betrachtet und die einzelnen

DIE NATURWISSENSCHAFTEN

16. Jahrgang | 10. Februar 1928 | Heft 6

Über die allgemeine Bedeutung des mathematischen Denkens[1].

Von R. COURANT, Göttingen.

Unter den Bezirken wissenschaftlichen Denkens nimmt die Mathematik sicherlich eine Sonderstellung ein. Trotz ihrer engen Verknüpfung mit den Naturwissenschaften ist sie doch keine von diesen; mathematische Objekte sind nicht Naturphänommene, sondern gehören dem Bereiche des Geistigen an. Aber noch weniger darf man die Mathematik zu den Geisteswissenschaften zählen, denen bei aller Willkür der Abgrenzung und bei aller Vielgestaltigkeit der Gegenstände und Methoden doch eines gemeinsam ist: die Einstellung auf den *Menschen* als geistige Persönlichkeit. Nichts liegt dem mathematischen Denken ferner als eine solche Einstellung: es strebt vielmehr zur Erkenntnis absoluter, vom Ich losgelöster Wahrheit und verkörpert diese vom Menschlich-Persönlichen fortgerichtete Tendenz schroffer als jede der Naturwissenschaften.

Vielleicht liegt hierin eine der tiefsten Ursachen für den Mangel an Popularität und die außerordentliche Verschiedenheit der Wertschätzung, welche die Mathematik bei verschiedenen Menschen, Völkern und Zeiten genießt. Unberührt von solchen Schwankungen hat die mathematische Wissenschaft durch Jahrtausende ihre ungebrochene Lebenskraft und Fruchtbarkeit bewiesen. Aber wenn wir in dem heutigen krisenhaften, von Spannung erfüllten Zustande des geistigen Lebens uns über die allgemeine Bedeutung des mathematischen Denkens Rechenschaft geben wollen, so dürfen wir uns nicht mit einem solchen Hinweis auf die stolze Vergangenheit begnügen.

Wir müssen trachten, die Motive und Ziele des mathematischen Denkens selbst in ihren Grundzügen zu erfassen. Dieser Aufgabe will ich heute zu dienen versuchen und dabei an die historische Entwicklung anknüpfen.

So wenig Zufall und Mode im einzelnen aus dem geschichtlichen Entwicklungsprozeß der Mathematik ausgeschaltet erscheint, so deutlich offenbart sich doch die innere Notwendigkeit und Konsequenz des mathematischen Denkens, wenn man die großen Linien des geschichtlichen Werdens betrachtet. Charakteristisch hierfür ist schon die antike oder genauer die griechische Mathematik. Die Intensität und zeitliche Konzentration dieser großartigen Leistung griechischen Geistes fordert noch heute unsere Bewunderung heraus und bietet der historischen Forschung immer neue Probleme und Einsichten in das Wesen wissenschaftlicher Entwicklung überhaupt. Mathematisches Denken an sich ist wohl ebenso alt wie menschliche Kultur. Schon die einfachsten Fragen des Messens und die nächstliegenden Probleme der Zeitrechnung drängten zu mathematischen Begriffsbildungen. Aber trotz allen solchen Ansätzen bei den verschiedenen Kulturvölkern des Altertums haben doch erst die Griechen aus der Mathematik eine *Wissenschaft* gemacht, die um ihrer selbst willen, aus der Freude an der absoluten Erkenntnis heraus betrieben wurde und losgelöst von ursprünglichen Anlässen und praktischen Zwecken ihre eigene Bedeutung hat. In erstaunlich kurzer Zeit haben die griechischen Denker den Weg gefunden, der von der Notwendigkeit quantitativer Betrachtungen im täglichen Leben bis zur freien Souveränität der reinen mathematischen Begriffsbildung führt, wie sie ihren klassischen Ausdruck in Euklids Elementen findet. Hier ist der Zusammenhang mit der physischen Realität sozusagen völlig gelöst; auf dem Boden der Axiome, deren Geltung außer Diskussion bleibt, wird in logisch zwingender Weise das Gebäude errichtet, das noch nach Jahrtausenden als Musterbeispiel mathematisch strenger Form seine unmittelbare Wirkung behauptet hat und dessen Inhalt bis in die jüngste Zeit hinein den mathematischen Schulunterricht in der ganzen Welt entscheidend bestimmte.

Zweifellos führte die Entwickelungslinie im Altertum von der konkreten lebensnahen, stoffgebundenen, angewandten Mathematik erst schrittweise zu Verallgemeinerung und Abstraktion, zur reinen auskrystallisierten mathematischen Form. Mit vollständiger Lückenlosigkeit und Klarheit jedoch können wir diese Entwickelungstendenz erst in der neueren Mathematik verfolgen, wenn wir auch als handelnde Personen in ihr nur schwer eine objektive Haltung gewinnen können. Während bei der griechischen Mathematik, wie sie uns heute in der perspektivischen Verkürzung erscheint, als erstes die axiomatische Strenge der Form und die bewußte Entfernung von den Anwendungen frappiert, beginnt die neue, nach langen und langsam sich auswirkenden Vorbereitungen im siebzehnten Jahrhundert mit unwiderstehlicher Macht einsetzende Entwicklung ganz am anderen Ende. Lebensvollste Verflechtung physikalischer, astronomischer, technischer Gedanken und Probleme mit der Mathematik ist Selbstverständlichkeit; die Wechselwirkung aller dieser Wissenschaften ist die reichste Quelle für den sich entfaltenden Strom der modernen Analysis.

[1] Vortrag, gehalten bei der Tagung Deutscher Philologen und Schulmänner, Göttingen, September 1927.

Getragen von einer kleinen Schar genialer universeller Geister, denen nichts ferner lag als Spezialistentum oder gar Beschränkung auf reine abstrakte Mathematik, eroberte das mathematische Denken wie in einem Sturm der Ekstase einen bis dahin unerhört großen neuen Machtbereich, dem gegenüber der Bezirk der antiken „elementaren" Mathematik winzig erscheinen mußte. Was nach der entscheidenden Pionierarbeit von Männern, wie DESCARTES, FERMAT, BARROW, NEWTON und LEIBNIZ durch die nächsten Generationen bis zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts zutage gefördert wurde, insbesondere die Leistungen von LEONHARD EULER, das sind Schätze, die bis heute noch nicht voll ausgemünzt werden konnten.

Aber dieser große Vorstoß des expansiven mathematischen Denkens hätte schließlich ins Leere verpuffen und in sich zusammenbrechen müssen, wenn er nicht seine Ergänzung hätte finden können in einer gewaltigen Arbeit der Selbstbesinnung und Konsolidierung durch eine Entwickelung, welche auch die moderne Mathematik wieder dem griechischen Ideal der krystallisierten axiomatischen Wissenschaft annäherte. Zwischen der begrifflich-gedanklichen Durchdringung und dem rasch wachsenden Inhalt der mathematischen Wissenschaft klaffte vom Beginn der Differential- und Integralrechnung an ein anscheinend unüberbrückbarer Abgrund. Die produktive Phantasie genialer Forscher, die mit sicherem Instinkt ihren Weg auch durch Dunkelheit und Nebel ohne den Kompaß wohlbegründeter Methodik fanden, löste sich vom Boden klassischer Strenge, angefeuert von der Fülle der Anwendungen und Ergebnisse. Zweifel und Kritik wurden abgetan wie mit den berühmt gewordenen Worten von D'ALEMBERT: „Allez, Monsieur, allez, et la foi vous viendra." Der Zauber der unendlich kleinen Größen übte trotz oder vielleicht gerade wegen seiner Unklarheit eine suggestive Kraft aus. Und doch war der kritische mathematische Geist, der vom Fühlen und Glauben zum Wissen und Verstehen drängt, nie ganz eingeschlafen. Er mußte sein Recht immer entschiedener fordern, je deutlicher die scheinbaren Widersprüche hervortraten, welche das skrupellose Operieren mit dem Begriffe des Unendlichen mit sich brachte, und je mehr die neue Mathematik auf der anderen Seite aufhörte, Angelegenheit einer kleinen Gruppe instinktsicherer Geister zu sein.

Es ist wohl kein Zufall, daß der Umschwung der mathematischen Einstellung von der naiven Produktivität zur strengen Wissenschaftlichkeit zeitlich parallel geht mit den großen Umwälzungen, welche die europäische Welt seit dem Beginn der französischen Revolution in geistiger und sozialer Hinsicht durchmachte.

Bis dahin waren im achtzehnten Jahrhundert die Träger des mathematischen Lebens vielfach Mitglieder der höfischen Akademien gewesen, fast niemals Lehrer an den Universitäten. Das Briefschreiben war ein Hauptmittel des Gedankenaustausches; Fachzeitschriften existierten nicht, und abgesehen von den Akademieabhandlungen bestand die ganze Literatur aus wenigen grundlegenden Werken, voran den Büchern von EULER. Die Mathematik an den Universitäten blieb in ihrem Niveau weit hinter diesen Werken zurück. Selbst ein Geist wie KANT, dessen Wirken so starke Beziehungen zu mathematischen Dingen hatte, war von einer wirklichen Kenntnis des mathematischen Standards seiner Zeit weit entfernt.

In dem Augenblick aber, wo mit der Befreiung und materiellen Hebung der unteren und mittleren sozialen Schichten eine breitere Masse sich um wissenschaftliche Bildung zu bemühen beginnt, ändert sich das Bild. Rasch ergibt sich der für das wissenschaftliche Leben des modernen Europa so charakteristische enge Kontakt zwischen Forschung und Lehre. Für die mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer wird er zum erstenmal in vorbildlicher Weise an der École Polytechnique in Paris hergestellt, trägt dort weithin sichtbare glänzende Früchte und stellt sich dann auch in Deutschland nach dem Vorgange der klassischen Philologie ein.

Entscheidend in Deutschland wird hierfür die Neuordnung des höheren Schulwesens und die damit zusammenfassende Schaffung des Oberlehrerstandes, für welche eine gründliche auf der Höhe der Zeit stehende wissenschaftliche Durchbildung gefordert wird. An der Aufgabe der Oberlehrerausbildung entfalten sich ganz neue Notwendigkeiten und Möglichkeiten des Universitätsunterrichtes. Das Niveau des Universitätsbetriebes steigt rapid, und in dem Oberlehrerstande entsteht ein verhältnismäßig großes mathematisches Publikum, aus dessen Mitte bald wieder Forscher hohen Ranges hervorgehen; so ist diese wechselseitige Wirkung zwischen Forschung und Lehre bis heute in der Mathematik der wichtigste Hebel des Fortschrittes geblieben. Zu den Oberlehrern treten bald die Ingenieure in rasch wachsender Zahl, und damit entsteht neuer starker Bedarf nach solider mathematischer Hochschulausbildung.

Eine solche Verbreiterung der höheren mathematischen Bildung forderte systematische Grundlagen und klare Grundbegriffe. Genialer Instinkt, der schließlich auch über logische Lücken zu richtigen Zielen führte, ist kein lehrbares und lernbares Massengut. So hätten allein diese äußeren Gründe die Bemühungen der Mathematiker stärker auf die Grundlegung und Konsolidierung der Analysis lenken müssen, wenn nicht schon von selbst die innere Tendenz der Wissenschaft diesen Weg mit zwingender Notwendigkeit vorgezeichnet hätte. In der Tat tritt seit dem Ende des achtzehnten Jahrhunderts neben die immer weiter fortschreitende inhaltliche Ausgestaltung der mathematischen Wissenschaften die zielbewußte Arbeit an den

Fundamenten. Der völlige Erfolg dieser Bestrebungen ist ein Hauptmerkmal für die Fortschritte der Mathematik im neunzehnten Jahrhundert. Zunächst war die wichtigste Aufgabe, die neue Analysis, d. h. die Differential- und Integralrechnung und ihre weiteren Konsequenzen von aller Mystik des Unendlich-Kleinen zu befreien. Die klare Herausarbeitung des Grenzwertbegriffes erwies sich rasch als völlig ausreichende und tragfähige Grundlage des ganzen Gebäudes. Man blieb aber bei diesem schon im wesentlichen von CAUCHY erreichten Standpunkt nicht stehen; man legte die Fundamente tiefer und gelangte erst zu einem gewissen Abschluß, als es vor allem durch die Bemühungen von WEIERSTRASS gelungen war, die moderne Analysis als ein System von Definitionen, Axiomen und Beweisen darzustellen, wie die euklidische Geometrie, unabhängig von Physik und Technik und anderen Anwendungen. Kurzum, für die neue größere Welt der Analysis wurde prinzipiell der Standpunkt der klassischen griechischen Mathematik wieder erreicht.

Aber auch hierin erschöpft sich keineswegs die kritische Leistung der neuesten Epoche. Zwei weitere mit der geschilderten und miteinander verflochtene Entwickelungslinien haben zu einer noch wesentlich vertieften Einsicht in die Grundlagen und das Wesen mathematischer Zusammenhänge geführt. Beide berühren sich mit philosophisch-erkenntniskritischen Fragestellungen nach dem Wesen der Gültigkeit mathematischen Denkens überhaupt. Ich meine hier einmal die allgemeine Mengenlehre, die erst in der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts von G. CANTOR begründet wurde und mit ihren allgemeinen Aussagen und Methoden zunächst auch in weiteren Kreisen der Mathematiker auf verständnislose Ablehnung traf. Ihr Ziel ist die Klärung des Begriffes des *Aktual-Unendlichen* (d. h. der aus unendlich vielen Dingen bestehenden Gesamtheiten), soweit er in der Mathematik eine Rolle spielt. Heute kann man sagen, daß die durchschlagenden neuen Ideen dieser Mengenlehre die ganze theoretische Mathematik durchdrungen haben und neues Licht auch über verhältnismäßig elementare Gegenstände verbreiten, so daß heute ein Mathematiker ohne Kenntnis der Mengenlehre kaum denkbar erscheint. Daß die Mengenlehre über die Fachkreise weit hinaus das Interesse auf sich gelenkt hat, insbesondere das der Philosophen, ist natürlich. Denn in ihr ist die Trennungslinie zwischen dem eigentlichen mathematischen Gegenstand und dem allgemeinen Objekt erkenntniskritischer und logischer Untersuchung schwer zu ziehen. Die Paradoxien, welche mit dieser Schwierigkeit der Grenzsetzung zusammenhängen, bilden noch bis heute eines der ernstesten Probleme der Grundlagenforschung. Ihre Lösung erfolgt von der mathematischen Seite her auf Grund der modernen axiomatischen Methode, und damit kommen wir zu dem Thema, welches den Inhalt der zweiten oben genannten Entwicklungslinie ausmacht.

Erst diese Methode der Axiomatik rührt an die tiefsten Wurzeln des mathematischen Denkens und stellt das Wesen des Mathematischen völlig klar heraus. Sie ist sicherlich die reifste Frucht auf dem Boden rein mathematischer Erkenntnis, und ich sage nicht zuviel damit, daß viel späteren Generationen die heutige axiomatische Methode ebenso als die Krystallisation der neueren Mathematik erscheinen wird, wie EUKLIDS Elemente der konzentrierte Ausdruck des griechischen mathematischen Denkens gewesen sind. Wir in Göttingen dürfen stolz darauf sein, daß der Euklid unserer Zeit DAVID HILBERT heißt und in Göttingen wirkt.

Die moderne Axiomatik nimmt historisch ihren Ausgang von der nichteuklidischen Geometrie. Schon im Altertum war es aufgefallen, daß unter den geometrischen Axiomen, die EUKLID aufstellt, eines eine Sonderstellung einzunehmen schien, das Parallelenaxiom, welches besagt: in einer Ebene gibt es zu einer Geraden durch einen außerhalb von ihr liegenden Punkt eine und nur eine Parallele. Man hat das Gefühl, daß diese Aussage kein echtes Axiom sei, sich vielmehr aus den anderen heraus mathematisch beweisen lassen müßte. Doch alle Versuche zu solchen Beweisen, insbesondere die im achtzehnten Jahrhundert gemachten Anstrengungen, erreichen zwar Nebenresultate von großem Interesse, aber nicht das gesteckte wirkliche Ziel. Erst im neunzehnten Jahrhundert fand das Parallelenproblem eine ebenso kühne und überraschende wie vollständige Lösung durch die unabhängigen Untersuchungen von LOBATSCHEWSKI in Kasan und BOLYAI in Budapest, denen der einsame GAUSS in seinen von ihm niemals veröffentlichten Gedankengängen schon vorausgeeilt war. Man kann den Grundgedanken dieser Untersuchungen folgendermaßen fassen: Wenn das Parallelenaxiom beweisbar ist, dann muß die Annahme seiner konträr entgegengesetzten Aussage zu einem Widerspruch führen. Läßt sich jedoch zeigen, daß eine solche dem Parallelenaxiom widersprechende Aussage nicht im Widerspruch zu den übrigen Axiomen der Geometrie steht, so ist bewiesen, daß es aus diesen nicht folgen kann, daß es also von den übrigen Axiomen unabhängig ist. Um nun diesen Widerspruchslosigkeitsbeweis zu führen, baut man sich eine Geometrie auf, d. h. ein System von Beziehungen zwischen Punkten, Geraden usw., für welches alle Verknüpfungsaxiome außer dem Parallelenaxiom erfüllt sind, dieses letztere aber gerade nicht. Wenn dieser Aufbau in einer widerspruchsfreien Weise gelingt, dann ist damit der Unabhängigkeitsbeweis erbracht. In der Tat konnten die genannten Forscher den Aufbau einer solchen Geometrie durchführen und haben damit die alte Frage endgültig beantwortet. Dies war in mehr als einer Hinsicht eine beinahe revolutionierende Wendung, die sich gegenüber den natürlichen Trägheitswiderständen erst langsam auswirken konnte. Zum ersten Male war hier klar das Problem gelöst, die logische Unabhängigkeit verschiedener Tatsachen voneinander streng zu beweisen, und damit eröffnen sich ganz neue grundsätzliche Möglichkeiten. Voll ausgeschöpft wurden diese erst nach Jahrzehnten in den berühmten „Grundlagen der Geometrie" von HILBERT, wo für das ganze Axiomensystem der Geometrie die Frage nach dem Zusammenhang bzw. der gegenseitigen Abhängigkeit oder Unabhängigkeit der Axiome in prinzipiell derselben Weise gelöst wird, wie es vorher nur im Hinblick auf das Parallelenaxiom geschehen war.

Aber die HILBERTsche Axiomatik führte noch einen wesentlichen Schritt weiter; sie beantwortete nicht nur die Frage nach den Zusammenhängen der geometrischen axiomatischen Aussagen, sondern sie warf auch die viel tiefer gehende Frage nach der *logischen Widerspruchslosigkeit der Axiomensysteme* auf, eine Frage, die viel entschiedener mit philosophisch-grundsätzlichen Einstellungen zusammenhängt als alles, was bis dahin in der Mathematik zutage getreten war. Wenn die mathematischen Tatsachen und insbesondere die Axiome im landläufigen Sinne „richtig" sind, wenn sie irgendeine Art objektiver, naturhafter „Geltung" haben, dann ist ja offenbar eine solche Frage ganz sinnlos. Zwischen tatsächlich bestehenden Sachverhalten einer objektiven Sphäre können doch selbstverständlich keine Widersprüche bestehen. Wenn man daher an der These der KANTschen Philosophie allzu wörtlich festhält und in den Axiomen der Mathematik die Beschreibung objektiver Sachverhalte in einer Sphäre der reinen Anschauung erblicken will, so bleibt für die HILBERTsche Fragestellung kein Raum. Ähnliches gilt für den gerade neuerdings mit großer Intensität verfochtenen sog. „intuitionistischen" Standpunkt. Auch nach ihm bringt die Mathematik Gegenstände einer rein anschaulichen Sphäre zur Darstellung und soll mit schärfster Rigorosität alles verbannen, was nicht in eine gewisse aus einer solchen Einstellung heraus aufgestellte Glaubenslehre hineinpaßt.

Kein Zweifel, daß die Aufrechterhaltung oder der Sieg dieses Standpunktes gleichbedeutend mit der Vernichtung der Mathematik oder doch wenigstens sehr großer und absolut lebenswichtiger Teile von ihr wäre und daß auch in sich genommen dieser Standpunkt trotz der Suggestivkraft seines heutigen genialen Verfechters unhaltbar ist. Das Problem der Geltung und Richtigkeit mathematischer Aussagen ist nicht so einfach durch den Hinweis auf die Intuition zu beantworten. Schon die nichteuklidische Geometrie zeigte das. Hätte KANT etwas von ihr wissen können, so würde dieses Wissen sicherlich nicht ohne Einfluß auf seine Gedankengänge und Formulierungen geblieben sein, und jedenfalls geht es nicht an, die nichteuklidische Geometrie als zwar logisch widerspruchsfrei, aber objektiv falsch für die sog. „Außenwelt" abzutun, um damit die These von KANT zu retten. Dies ist um so weniger überzeugend, als die Vorstellungen und Tatsachen der nichteuklidischen Geometrien sich weitgehend bei der Beschreibung von Naturphänomenen und anderweit bewährt haben.

HILBERT hat die angedeuteten, in der Frage nach dem Wesen des Mathematischen wurzelnden Schwierigkeiten durch eine Konzeption von größter Kühnheit und Tragweite überwunden, indem er auf den gedanklichen Vorarbeiten fußte, die von DEDEKIND u. a. in der Klärung des Zahlbegriffes und anderer Grundfragen geleistet worden war. Das Problem der objektiven Gültigkeit mathematischer Aussagen wird dadurch gelöst, daß diese Frage an sich als sinnlos und sinnwidrig erkannt wird. Reine mathematische Begriffe lassen sich nicht definieren, sie *haben* schließlich keinen anschaulich aufweisbaren gegenständlichen Sinn an sich, sondern sie *gewinnen* erst diesen Sinn durch ihre wechselseitigen Beziehungen, welche durch die Axiome festgelegt werden. Durch das eigentümliche, ebenfalls einer näheren Analyse und Charakterisierung fähige mathematische Schließen erhält man auf dieser Grundlage ein Gewebe von mathematischen Zusammenhängen, welches die mathematische Theorie ausmacht. Die Frage nach der Gültigkeit der mathematischen Theorie für die physikalische Welt ist lediglich damit gleichbedeutend, ob das gewonnene Netz von Begriffen und Zusammenhängen zur Darstellung der Tatsachen jener Naturwelt paßt oder nicht. Eine Frage, die trotz ihrer entscheidenden Wichtigkeit außerhalb des eigentlichen rein mathematischen Bezirkes bleibt. Wenn nun aber die mathematischen Begriffe in sich keine sachliche, objektive Realität besitzen, die sich durch Aufweisung innerhalb einer rein anschaulichen Sphäre fassen läßt, so gewinnt das Problem der Widerspruchslosigkeit eine eminente Bedeutung. Man kann geradezu sagen, daß an Stelle der objektiven Realität die Widerspruchsfreiheit der Axiome tritt und daß man als Grundproblem einer mathematischen Disziplin den Nachweis dieser Widerspruchsfreiheit anzusehen hat, d. h. den Beweis, daß aus den betreffenden Axiomen durch mathematisches Schließen niemals widersprechende Aussagen gewonnen werden können. Das erste Beispiel, an welchem ein solches Problem in Angriff genommen wurde, waren naturgemäß die Grundlagen der Geometrie.

Hier wurde der Beweis geführt, indem man zeigte, daß ein Widerspruch in den Grundaxiomen der Geometrie einen Widerspruch in den Axiomen der Arithmetik nach sich ziehen müßte; von diesen letzteren aber setzte man zunächst ohne weiteren Beweis die Widerspruchslosigkeit voraus. Erst in neuester Zeit ist es HILBERT gelungen, durch konsequente Ausgestaltung des eben angedeuteten Grundgedankens das Problem der Widerspruchsfreiheit auch für die Arithmetik und überhaupt für die ganze Mathematik anzugreifen. Ich muß mich hier mit einer bloßen Andeutung begnügen.

Die HILBERTsche Theorie, deren Problem für den oberflächlichen Betrachter beinahe an die Aufgabe erinnert, sich selbst am Schopfe aus dem Sumpf zu ziehen, beruht auf folgenden Schritten:

Zunächst wird der inhaltliche Bestand der betreffenden mathematischen Disziplin, etwa der Zahlentheorie, auf ein System von Axiomen zurückgeführt und deren Aussagen vollständig formalisiert, d. h. ihrer inhaltlichen Bedeutung entkleidet und lediglich als gegenseitige Beziehungen zwischen Symbolen gedeutet. Diese Beziehungen sowie die Regeln und Schemata des mathematischen Schließens werden in einer symbolischen Zeichensprache ausgedrückt, einer Begriffsschrift, die keine Worte und Sätze mehr kennt, wie sie einst LEIBNIZ vorgeschwebt hatte. Nunmehr läßt sich jeder mathematische Beweis umschreiben in ein Schema solcher mathematischer Symbole. Die Untersuchung dieser Schemata oder Beweisfiguren nennt HILBERT die Metamathematik. Ein Widerspruch in den Axiomen der betreffenden Disziplin müßte in einem solchen Beweisschema einen direkt aufweisbaren formalen Ausdruck finden. Nun kann man diese Beweisfiguren als anschaulich unmittelbar aufweisbare greifbare Gegenstände auf ihre Struktur hin untersuchen, und eine solche Untersuchung ist tatsächlich imstande, den Widerspruchslosigkeitsbeweis zu führen, d. h. zu zeigen, daß gewisse, einen Widerspruch zum Ausdruck bringende Strukturen in diesem Schema unmöglich sind. Wir sehen also, daß die HILBERTsche Beweistheorie das anschauliche Element aus der Mathematik keineswegs ausschaltet; im Gegenteil, es kommt ihm die höchste Bedeutung zu; nur wird es im Gegensatz zu dem Intuitionismus in eine andere Schicht verlegt; nicht die Gegenstände der mathematischen Aussagen sind anschaulich aufweisbar, sondern die in der Beweistheorie schematisch dargestellten mathematischen Zusammenhänge, und ihre Untersuchung ist also unmittelbar durch Operieren in der anschaulichen Sphäre möglich. So bleibt gewissermaßen die HILBERTsche Theorie durchaus im Rahmen einer kritisch-idealistischen philosophischen Einstellung.

Ich bin fest davon überzeugt, daß diese Theorie, die HILBERT mit weitgehender Unterstützung seines Mitarbeiters BERNAYS entworfen hat und deren Ausarbeitung im einzelnen noch ein schweres Arbeitsprogramm in sich birgt, eine noch nicht absehbare Bedeutung für die allgemeine philosophische Frage nach dem Wesen menschlicher Erkenntnis besitzt.

Überblicken wir noch einmal den langen Weg, der von den mathematischen Anfängen zu diesen Gefilden höchster Abstraktion führt, so tritt uns deutlich die allgemeine Entwickelungstendenz mathematischen Denkens vor Augen. Am Anfang das konkrete, individuelle, sehr häufig den Anwendungen entstammende Problem, und von dort aus ein allmähliches Aufsteigen zu immer größerer Allgemeinheit und methodischer Reinheit, bis schließlich der stoffliche Einzelinhalt abgestreift ist und nur noch auskrystallisierte mathematische Form übrigbleibt. Die dionysische Phase einer mathematischen Disziplin geht allmählich in die apollinische über. Dieser Prozeß des Sublimierens und der Verschiebung des Interesses vom Konkreten zum Abstrakten hin ist der natürliche innere Rhythmus, nach welchem sich im kleinen und im großen mathematisches Denken vollziehen muß, unerbittlicher und radikaler als in anderen Gebieten des geistigen Lebens und der Kunst.

Es liegt hierin eine der Hauptquellen für immer neue Kraftentfaltung. Mit jeder Stufe, die man in einem solchen Verallgemeinerungsprozeß höher steigt, öffnen sich neue Zusammenhänge vor bisher Getrenntem; Probleme, die vorher unangreifbar schienen, weil man nicht verstand, das stofflich Zufällige vom innerlich notwendigen begrifflichen Kern zu sondern, werden auf die einfachste Art lösbar. Der vorhandene Bestand der Wissenschaft, vielleicht schon in Gefahr, in Einzelheiten auseinanderzufallen, erfährt Vereinfachung und Zusammenraffung. Zu den Ausgangspunkten der Entwicklung und zu den Anwendungen zurück eröffnen sich dem rückschauenden Blick neue einfache Wege und Mittel der Beherrschung.

Aber es ist nicht zu leugnen, daß in der allgemeinen, auf fortschreitende Abstraktion zielenden Tendenz auch ein nicht geringes Gefahrenmoment liegt. Das vom harten Stoff der Wirklichkeit unbeschwerte Gedankenspiel der reinen Abstraktion übt auf viele Gemüter einen unwiderstehlichen Zwang aus und läßt zuweilen vergessen, daß letzthin alle Mathematik mehr oder weniger unmittelbar aus dem Konkreten herausgewachsen ist und die Verbindung mit dem konkreten Stoffe des Lebens nicht verlieren darf, wenn die Wissenschaft als Ganzes in einem solchen Entwickelungsprozeß nicht zu reiner lebensferner Form erstarren will. Der mathematischen Wissenschaft als solcher darf man heute in dieser Hinsicht eine so glückliche Prognose stellen wie jemals. Neue triebkräftige lebendige Probleme werden heute in großer Zahl von Physik, Technik und in wachsendem Maße auch von der Biologie der Mathematik gestellt. Das Bedürfnis nach mathematischer Durchdringung dieser Wissenszweige ist in raschem Steigen begriffen. Es wäre ein Unglück, wenn die berufenen Vertreter der Mathematik ihren Blick von diesem großen, aus den Anwendungen herauswachsenden Aufgabenkreise abgewandt halten und ihn allzu starr nach der einen Seite der Abstraktion hin richten wollten. Sie würden in einer notwendig entstehenden Reaktion durch eine anders geartete Schicht verdrängt werden, die vielleicht allzu ausschließlich nach der Seite der Anwendungen und der Zweckmäßigkeit hin orientiert ist. Manches von dem erreichten wissenschaftlichen Standard und die Kontinuität der Entwickelung würde dann bedroht sein. Wir sind heute vielleicht in höherem Maße als frühere Generationen mit der Verantwortung dafür belastet, daß zwischen theoretischer und angewandter Betrachtungsweise in der Mathematik ein gesundes Gleichgewicht hergestellt und aufrechterhalten wird.

Ich kann an dieser Stelle nicht anders als nur sehr allgemein und skizzenhaft die Probleme und Sorgen kennzeichnen, welche uns Mathematiker bewegen. Aber ich darf es nicht unterlassen, vor diesem Kreise noch eine Frage zu berühren, welche scheinbar mit der Mathematik als *Wissenschaft* nichts zu tun hat und doch so eng an ihren Lebensnerv greift; ich meine das Problem: Mathematik und Schule. Ich kenne diese Frage zwar aus eigener Erfahrung nur als leidendes Objekt, nicht als handelndes Subjekt und fühle mich nicht dazu befugt, über Einzelheiten zu sprechen; aber ich weiß wohl, welche Fortschritte und Umwälzungen des mathematischen Schulwesens seit meiner Schulzeit durch die Arbeit so vieler Männer, vor allem durch die Pioniertätigkeit von FELIX KLEIN sich vollzogen haben. Und trotz allen diesen Fortschritten: Wenn auch dem heutigen mathematischen Forscher angesichts eines blühenden wissenschaftlichen Lebens um das Schicksal der Mathematik als Wissenschaft nicht bange zu sein braucht, so muß er sich doch dessen bewußt sein, daß sie als Element der Bildung und Erziehung durchaus der schützenden Fürsorge bedarf. Was bedeutet denn überhaupt Wissenschaft als solches Element? Wenn ich auf ein Wort von KANT anspielen darf: Sie soll den Blick des jungen Menschen auf das Sittengesetz in seinem Innern und auf den gestirnten Himmel über ihm lenken. In dem Hinweis auf diese zweite Blickrichtung liegt die große erzieherische Kraft, welche den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichtsfächern innewohnt, viel mehr als in dem formalen Element oder der praktischen Nützlichkeit. Läßt man den exakten Wissenschaften an den Schulen nicht genug Raum, so wird man eine Generation erziehen, welche in übertriebenem, weichlichem Persönlichkeitskultus vergißt, daß Persönlichkeit nur dann höchstes Glück der Erdenkinder ist, wenn sie sich dienend dem Sachlichen, Überpersönlichen unterordnen kann.

Vielleicht in keinem Fache hängt der Erfolg des Unterrichtes so stark von der Individualität des Lehrers ab wie in der Mathematik. Um so mehr müssen wir Hochschullehrer uns immer wieder die Frage stellen, ob denn von unserer Seite her genug geschieht, damit Lehrer herangebildet werden, welche der hohen Aufgabe wissenschaftlich gewachsen sind. Es ist ja in den letzten Jahrzehnten so viel über die Kluft zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik gesprochen worden, daß ich nicht noch einmal darauf einzugehen brauche. Von seiten der Schule ist in dieser Zeit seit KLEINS Eingreifen viel geschehen, um den früheren Zustand der Stagnation zu überwinden und die Kluft einzuebnen; die Hochschule hat in dieser letzten Hinsicht entschieden weniger geleistet. Was sie leisten kann und muß, das läßt sich kaum in den Rahmen einer allgemeinen organisatorischen Reform spannen; aber eines kann man gewiß allgemein sagen: es hat sich allmählich ein Zustand herausgebildet, bei welchem es viel zu wenig Kontakt zwischen Dozent und Student gibt. In viel zu hohem Maße beherrscht das Vorlesungswesen den mathematischen Hochschulunterricht. Gewiß haben höhere Vorlesungen, die einen schwierigen Stoff frei gestalten, auch dann einen hohen Wert, wenn sie über die Köpfe der Durchschnittshörer hinweggehen. Aber trotzdem müssen wir auf das Allerentschiedenste einen Zustand anstreben, bei welchem der Student nicht bloß oder in erster Linie wehrloser passiver Zuhörer bei Professorenmonologen ist, sondern in lebendiger Wechselwirkung zu spontaner wissenschaftlicher Arbeit herangezogen wird. Seminare, Übungen und vielleicht neue akademische Unterrichtsformen müssen hierzu das Hauptmittel sein. Erst wenn wir unsere Studenten, die späteren Lehrer, auf ein wissenschaftliches Niveau bringen, von dem aus sie später die Gegenstände der Schulmathematik souverän beherrschen, dürfen wir uns zufrieden geben. Leider sind wir von diesem Ziele weit genug entfernt. Nur gar zu oft muß man es erleben, daß ungeeignete Menschen viele Jahre lang studieren oder vielmehr Vorlesungen usw. fleißig anhören, ohne daß sie selber auch nur eine Ahnung von der völligen Ergebnislosigkeit des Studiums erlangen. Wenn diese bedauernswerten Opfer der akademischen Lernfreiheit dann auch noch das Glück haben, ihre Examina zu bestehen — es soll so etwas vorkommen — dann entstehen jene unglücklichen Typen von Mathematiklehrern, welche jedem begabten Sekundaner gegenüber völlig hilflos sind und beinahe schlimmer wirken als eine entsprechende Figur aus dem philologisch-historischen Lager.

Solche Fälle müssen die Universitäten auf ihr Schuldkonto nehmen. Es ist hier nicht die Zeit, Wege und Möglichkeiten der Abhilfe zu erörtern. Aber ich möchte doch schließen mit dem Ausdruck der Überzeugung: Ob und wie es den Hochschulen gelingt, die notwendige und wirksame Ausbildung zu sichern, ohne das wissenschaftliche Niveau des Hochschulunterrichtes zu senken, das ist die Schicksalsfrage, von deren Lösung die Zukunft der Mathematik an den Schulen und zum guten Teil auch an den Hochschulen abhängen wird.