NL Hausdorff : Kapsel 49 : Fasz. 1067

[Raum und Zeit]

Hs. Ms., z. T. stichpunktartig. - [Leipzig], [vermutl. 1904]. - 21 Bll.

Blatt 13 dieses Faszikels enthält Teile eines Inhaltsverzeichnisses eines vermutlich von Hausdorff geplanten Buches über Raum und Zeit mit drei Teilen: „I. Das formale oder mathematische Problem: Raum und Zeit als logische Constructionen. II. Das objective oder erkenntnistheoretische Problem: Raum und Zeit als Wirklichkeiten. III. Das subjective oder psychologische Problem: Raum und Zeit als Bewusstseinsinhalte." Die Titel der ersten fünf Kapitel des ersten Teiles sind angegeben: „1. Der Formalismus, 2. Die Axiome der Zeit, 3. Die Axiome des euklidischen Raumes, 4. Die nichteuklidische Geometrie, 5. Sonstige geometrische Systeme." Die Blätter 1–12 enthalten eine Ausarbeitung von Punkt 1. „Der Formalismus"; diese ist im folgenden abgedruckt. Die übrigen Blätter enthalten einschlägige stichpunktartige Notizen. Daß ein Buch geplant war, legt auch die Rückseite von Blatt 13 nahe: sie enthält einen Brief des Verlages Veit & Comp. vom 15. 3. 1904 mit der Bitte, ein Exemplar des mit dem Brief verschickten Verlagsvertrages unterschrieben zurückzusenden. Der Verlagsvertrag ist im Nachlaß nicht mehr vorhanden.

Erstes Kapitel
1. Der Formalismus

Solange die Geometrie als Wissenschaft vom thatsächlich existirenden Raume definirt wird, ist sie eine unsichere, bedingte, abhängige Wissenschaft. Denn sie würde dieses Object mit anderen Wissenschaften theilen, die man, wie Physik, Psychologie, Erkenntnisstheorie, wohl nicht zur Geometrie selbst rechnen kann, und dann hängt sie ab von dem Zustande dieser Wissenschaften, die gleich ihr die Frage nach der Beschaffenheit des wirklichen Raumes stellen und zu beantworten suchen. Sie hängt ab von Entscheidungen, Zugeständnissen, Einigungen, auf die sie selbst keinen Einfluss hat. Wenn die Geometrie vom realen Raume spricht, so muss sie darauf warten, welcher Realitätsklasse der Raum von der Philosophie zugewiesen wird, oder aus eigener Machtvollkommenheit eine vielleicht falsche Ansicht darüber bilden. Ist der Raum ein Ding oder eine Ordnung der Dinge? eine Realität ausserhalb des Bewusstseins, oder nur im Bewusstsein, oder Beides? eine Thatsache der Erfahrung oder ein Gesetz vor aller Erfahrung? eine Gewohnheit oder eine Nothwendigkeit? eine Anschauung, ein Begriff, oder vielleicht nur ein Wort? Von der Entscheidung aller dieser Alternativen würde die Geometrie beeinflusst oder müsste wenigstens gewärtig sein, davon beeinflusst zu werden, während ihre eigene Mitwirkung an der Urtheilsfindung fraglich und von den betheiligten Instanzen | bestritten ist. Bl. 2
Zuletzt wäre kein Ende dieser Abhängigkeit und Unsicherheit abzusehen; denn nichts garantirt dafür, dass die genannten philosophischen Probleme jemals eine zwingende und einstimmig anerkannte Lösung finden werden. Alles Wirkliche gestattet den Zweifel, alle Erkenntniss des Wirklichen ist ihrem Wesen nach

unvollständig und verschiedener Deutungen fähig. Die einzige Art Gewissheit, die wir kennen, ist die der *formalen Logik*. Selbst eine actuale Gewissheit wie die der Existenz des Bewusstseins in einem Acte dieses Bewusstseins – das Cartesische cogito ergo sum – ist bestreitbar, weil sie eine bestreitbare Auslegung der Begriffe Existenz, Bewusstsein, Zeit u. dgl. voraussetzt.

Die Geometrie wäre also, als Lehre vom wirklichen Raume, in den Zustand wartender Abhängigkeit von fremden Entscheidungen, in den Zustand der *Heteronomie* gedrängt. Der philosophische Streit um ihre Grundlagen, mit all seinen Schwankungen und Erschütterungen, würde bis in die höchsten Stockwerke des mathematischen Lehrgebäudes zu spüren sein. Die geschichtlichen Thatsachen zeigen umgekehrt, dass die Mathematik jederzeit als Typus einer strengen, unabhängigen, autonomen Wissenschaft gegolten und sich als solcher um so reiner durchgesetzt hat, je weniger sie das Ergebniss philosophischer Bemühungen abzuwarten die Geduld fand. Es giebt nur eine Erklärung dafür: die Geometrie redet *nicht* vom wirklichen Raume, sie redet von einem Erzeugniss frei schaffenden Denkens. Die Gewissheit der Geometrie ist die Gewissheit
Bl. 3 der formalen Logik. |

Ein Satz wie dieser zuletzt ausgesprochene kann natürlich selbst nicht formale Gewissheit haben: er redet ja von einer Wirklichkeit, von der Wissenschaft, die man Geometrie nennt. Er kann allenfalls eine Definition der Geometrie bedeuten und diese Definition kann sich nie durch ihre Nothwendigkeit aufdrängen, sondern höchstens durch ihre Zweckmässigkeit empfehlen. Es ist zweckmässig, den wirklichen Raum als Object der Geometrie zu streichen, weil es zweckmässig ist, der Geometrie den Character einer apodiktischen und autonomen Wissenschaft zu lassen, den bis auf wenige Ausnahmen alle Denker ihr zugesprochen haben.

Unter den Versuchen, dieser Consequenz auszuweichen, ist der berühmteste der Kantische Apriorismus, der Raum und Zeit als *reine*, d. h. nicht aus der Erfahrung geschöpfte, sondern der Erfahrung vorausgehende *Anschauungen* erklärt. Wie alle einzelnen und speciellen Auffassungen vom Verhältniss der Mathematik zur Wirklichkeit, so haben wir auch diese erst an späterer Stelle zu prüfen. Hier genügt uns, dass überhaupt ein solches Verhältniss zur Wirklichkeit in einer für die Gültigkeit der Mathematik entscheidenden Form angenommen wird, um diese Annahme zu verwerfen. Wir wollen die Unabhängigkeit der Mathematik von philosophischen Thesen, und es kann uns nicht beruhigen, dass auf Grund einer bestimmten solchen These – die ja bestreitbar und jedenfalls bestritten ist – der Mathematik eine autonome, sogar souveraine Stellung zugesprochen wird. Nicht als Sclavin, nicht als Herrscherin der Wirklichkeit soll die
Bl. 4 Mathematik anerkannt und legitimirt sein; | erst wenn sie in sich selbständig begründet ist, kann sie in irgendein, gleichviel welches, Verhältniss zur Wirklichkeit treten. Ob sie dann zu dienen oder zu gebieten, zu beschreiben oder zu erklären, zu interpretiren oder zu commandiren berufen ist, wird die Analysis des Wirklichen lehren.

Wir haben hier, in radicalerer Fassung, einen Gegensatz betont, den man sonst als Unterschied zwischen *reiner* und *angewandter* Mathematik zu bezeichnen pflegt. Die reine Mathematik, die „freie“, autonome Mathematik betrachtet Gedankendinge, Symbole von unbestimmter Bedeutung, die keinem andern Zwange als dem der logischen Denkbarkeit, der Widerspruchsfreiheit unterworfen sind. Sobald diesen Symbolen ein actueller Sinn beigelegt wird, eine Beziehung zur Wirklichkeit, treiben wir angewandte Mathematik, wir zählen wirkliche Dinge, messen wirkliche Grössen, analysiren wirkliche Empfindungscomplexe. | Bl. 5

Die vollkommene Logisirung, Formalisirung, Rationalisirung, die als unbewusst treibende oder bewusst anerkannte Tendenz die Geschichte der *Mathematik* in der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts beherrscht, hat eine doppelte Bedeutung: sie ist zugleich Selbstbescheidung und Selbstbefreiung, Sicherung und Entsagung, Autonomie innerhalb selbstgezogener Schranken um den Preis des Verzichtes auf übergreifende Prätentionen. Auch der Mathematik blieb die Nöthigung nicht erspart, sich vor ihren Freunden zu schützen und die von begeisterten Parteigängern genährten Expansionsgelüste kraftvoll zu überwinden: dort war die Quelle abenteuerlicher Hoffnungen und verlockender Speculationen, die den feindseligen Widerstand benachbarter Wissenschaften herausfordern und rückwirkend die Festigkeit des eigenen Besitzes erschüttern mussten. Nur an den kühnsten dieser philosophischen Freunde sei erinnert, der den höchsten Beruf der Mathematik zuerkannte und sie damit in die bestreitbarste und bestrittenste Stellung brachte. Für Kant sind die mathematischen Wahrheiten von einem Erkenntnisswerth und einer unerschütterlichen Geltung, die einen eigenen Erkenntnissgrund abseits vom formalen Denken und von der Erfahrung | beanspruchen: eine *reine Anschauung* muss sie erzeugen Bl. 6
und mit aprioristischer Gewalt den Dingen der Erfahrung aufprägen, als Formen möglicher Erfahrung, als Bedingungen für einheitlichen Zusammenhang und Begreiflichkeit der Natur. Nicht hier schon soll diese Ansicht gedeutet und geprüft werden, aber bei jeder möglichen Interpretation ist soviel klar, dass die Mathematik eine solche souveraine Macht nur durch eine Verpflichtung und Anlehnung nach aussen hin erkaufen kann, dass sie – um einen Ausdruck desselben Philosophen vom ethischen Gebiet auf das theoretische zu übertragen – auf alle Fälle in den Zustand der *Heteronomie* geräth. Sobald eine wesentliche, für die Grundlagen oder die Gültigkeit der Mathematik entscheidende Beziehung zur Wirklichkeit bestehen soll, lebt die Mathematik nicht mehr von eigenen Gnaden und arbeitet mit fremdem Credit: wie auch immer diese Beziehung beschaffen sein möge. Ob wir, in empiristischem Gegensatze zu Kant, die Geometrie als Ergebniss aus der Erfahrung gewinnen, ob wir sie, mit Kant, als Gesetzgebung vor der Erfahrung in uns tragen, in jedem Falle trifft ein Zweifel an der Gültigkeit der Erfahrung auch die Gültigkeit der Geometrie; ja im zweiten, aprioristischen Falle trifft er sie schärfer, weil ein übertretenes Gesetz den Gesetzgeber doch noch anders discreditirt als eine abweichende Einzelthatsache den inductiven Begriff aus früheren Thatsachen. In der ganzen philosophischen Discussion seit Kant ist die Mathematik, oder wenigstens die Geometrie, stets als heteronom behandelt worden, | als abhängig von einer fremden Instanz, Bl. 7
die wir, nähere Bestimmung vorbehalten, als *Anschauung* bezeichnen können,

mag es nun reine oder empirische, subjective oder wissenschaftlich corrigirte, angeborene oder erworbene Anschauung sein. Von dieser Abhängigkeit sich zu befreien, aus der Heteronomie zur Autonomie sich durchzukämpfen war die wichtigste *principielle* Aufgabe der modernen Mathematik, zu deren Lösung allerdings mehr der innere Betrieb und die thatsächlichen Leistungen dieser Wissenschaft als ihr schon längst etwas erkaltetes Bedürfniss nach philosophischer Verständigung gedrängt haben.

Aber liegt die Heteronomie nicht eigentlich im Wesen der Sache, wenigstens der Raumlehre? Redet die Geometrie nicht vom Raume unserer Anschauung und beginnt mit Elementen der Anschauung? Würde nicht die Lehre von der Zeit – die wir allerdings gewöhnlich nicht mit zur Mathematik rechnen, die aber, wie sich zeigen wird, der Geometrie in jeder Hinsicht zu coordiniren ist – denselben Weg einschlagen müssen, und also höchstens Arithmetik, Algebra, Analysis einen denkbaren Anspruch auf Autonomie haben? Der bequeme Appell an die Anschauung, um Lücken der Deduction zu stopfen, soll hiermit nicht empfohlen sein; aber ist nicht ein letzter oder erster Appell an die Anschauung unerlässlich, um die Deduction überhaupt beginnen zu können? Selbst wenn wir darauf verzichten, im Sinne der Newton'schen Worte „tempus et spatium, ut omnibus notissima, non definio“ auf psychologische Zustände zweifelhafter Sicherheit zu verweisen und, der suggestiven Kraft der Sprache vertrauend, mit Worten wie homogen, stetig, dreidimensional den Eindruch einfacher
Bl. 8 | Vorstellungen vorzutäuschen, die in Wahrheit äusserst complicirte Begriffsbildungen voraussetzen – : selbst wenn wir diese drastischen oder deiktischen Künste verschmähen und ehrlich nach Präcision und Klarheit trachten, gelangen wir nicht letzten Endes doch an eine Grenze der Logik, wo wir *zeigen* und nicht *beweisen*, an gemeinsame Erlebnisse *erinnern* und nicht *definiren*? Die verschärfte Analyse von Raum und Zeit stösst schliesslich auf Begriffe wie Punkt, gerade Linie, Entfernung, Augenblick, vor und nach, zwischen, grösser und kleiner; und die Erfahrung bestätigt, was logische Gründe vorauszusagen gestatten, dass ein Theil dieser Begriffe *indefinibel* wie ein Theil der zwischen ihnen vorhandenen Beziehungen *unbeweisbar* bleibt. Man mache die Probe. Was ist ein *Punkt*? Das was keine Theile hat. Das Unausgedehnte. Die Grenze einer Linie. Ein Ort im Raum. Gegenfragen: was heisst Theil? was heisst Ausdehnung? was heisst Grenze, Linie, Ort, Raum? Das alles sind Umschreibungen, Wortgleichungen, ein Wort durch ein Wort erklärt, idem per idem, manchmal obscurum per obscurius: Definitionen sind es nicht. Oder man versuche Sätze zu beweisen wie die, dass zwei Punkte eine gerade Linie bestimmen, dass zwei gerade Linien, die einander nicht schneiden, mit jeder dritten gleiche Winkel bilden, und überzeuge sich, dass jeder angebliche Beweis ähnliche Sätze wie die zu erschliessenden als unbewiesene Voraussetzungen zu Grunde legt. Übrigens ist daran nichts zu erstaunen, da Definition und Deduction keine absoluten Bestimmungen, sondern Relationen eines Begriffs zu andern
Bl. 9 | Begriffen, eines Urtheils zu anderen Urtheilen sind, wobei also zuletzt primitive Elemente, d. h. unerklärte Begriffe und unbewiesene Urtheile (Axiome) übrig bleiben müssen. Man wird in der Auswahl dieser Elemente einen gewis-

sen Spielraum haben und ihre Anzahl, falls daran etwas liegt, auf ein Minimum herabdrücken können, aber völlig zu vermeiden sind sie keineswegs. Woher kommen also diese Anfänge des Denkens? so lautet die entscheidende Frage. Sobald man keine andere Antwort weiss, als dass ihre Gültigkeit durch die *Anschauung* verbürgt sei, ist die Heteronomie der Mathematik ausgesprochen. Wir können uns jetzt darüber klar werden, dass diese Auffassung nicht etwa nur ein abstractes Recht auf Selbständigkeit der Mathematik verletzt, sondern mit fühlbaren Hemmnissen und handgreiflichen Störungen den Lebensnerv dieser Wissenschaft antastet.

Die Anschauung ist ungenau, beschränkt, irreführend, individuell, wandelbar, während die Mathematik genau, unbeschränkt, zuverlässig, allgemein, unveränderlich sein soll. Ein Verhältniss zwischen beiden kann also jedenfalls nicht in dem Sinne bestehen, dass die Gültigkeit der Mathematik sich auf die Anschauung stützt. Wäre aber selbst die Anschauung alles das, was sie nicht ist, so dürfte sich trotzdem die Mathematik nicht ohne Kritik und logische Analyse auf die Anschauung berufen. | Bl. 10

Bei der Besprechung dieser Punkte ist ein schärfer gefasster Begriff der Anschauung entbehrlich; ja dass ein solcher nicht ohne philosophische Controverse zu haben ist, kann sogar als Stütze unserer Meinung gelten. Über die Anschauung sind entgegengesetzte Meinungen möglich, wenigstens historisch vorhanden; die Gültigkeit der Mathematik darf aber nicht vom Siege irgendeiner philosophischen Richtung abhängen.

Die Ungenauigkeit der Anschauung ist niemals verkannt worden und bedarf keiner ausführlichen Schilderung. Die Punkte unserer Anschauung sind niemals Punkte, sondern winzige Parcellen des Gesichtsfeldes, von Glasperlen- bis zu Fixsterngrösse, oder Empfindungskreise der Haut; für das, was wir Linien nennen, haben dünne Streifen und Röhren, Drähte, Fäden, bestenfalls sogenannte Lichtstrahlen als Modell gedient; bei Flächen stellen wir uns innerlich etwas wie gespannte Häute, Papierblätter, oder die sichtbaren Hüllen geformter Körper vor, unter denen wir die füllende Substanz wegzudenken versuchen. Ein dichtes Mosaik täuscht uns Continuität, die unterbrochene Bilderreihe des Kinetoskopes stetige Bewegung vor. Die Rohproducte dieser Anschauung bedürften mindestens der Reinigung, „Idealisirung“ durch das Denken, um als Begriffe und Axiome einer exacten Wissenschaft zugelassen zu werden.

Die Anschauung ist beschränkt; der Leichtigkeit, mit der sie einfache und häufig gesehene Bilder reproducirt, steht eine ausser- | ordentliche Unbehülflichkeit in Bezug auf unbekannte und verwickelte Verhältnisse gegenüber. Sie versagt, bei nicht besonders begabten Individuen, vor vielflächigen Krystallen, verschlungenen Knoten, ja schon vor grossen Zahlen. Wir werden bei verschiedenen Gelegenheiten die Ohnmacht der Anschauung mit der freien Beweglichkeit des Gedankens vergleichen können. Indessen giebt diese Betrachtung mehr ein allgemeines ungünstiges Vorurtheil gegen die Anschauung, als dass der Mangel complicirter Anschauungssynthesen direct gegen die Zuverlässigkeit einfacherer Anschauungselemente spräche. Wichtiger erscheint die principielle Beschränkung der Anschauung auf *endliche Gebiete*, die vielfach, wenn auch Bl. 11

nicht unbestritten, behauptet worden ist. Wenn sie besteht, so ist die Geometrie gegenüber der Anschauung wiederum in der Lage, die gelieferten Materialien erst einer Veredelung, Verallgemeinerung, Logisirung durch das reine Denken unterwerfen zu müssen, und die Anschauung gegenüber der Geometrie in der noch fataleren, eigentlich kein Object dieser Wissenschaft völlig realisiren zu können, denn das Unendliche in seinen verschiedenen Gestalten ist von Raum und Zeit nicht zu trennen.

Die Unfähigkeit, oder sagen wir mindestens Unsicherheit, der Anschauung in Bezug auf das Unendliche ist nicht ohne bedenkliche Folgen geblieben: in Fragen, die mit einem correct gefassten Unendlichkeitsbegriff zusammenhängen, hat sich die Anschauung nicht nur als verschwommen, sondern geradezu als irreleitend erwiesen. Die Anschauung hat lange Zeit | Bl. 12 zu dem Glauben verführt, dass die Bahn eines stetig bewegten Punktes überall eine Richtung – analytisch gesprochen jede stetige Function einen Differentialquotienten – haben müsse; seit Riemann und Weierstrass kennen wir stetige Bewegungen, denen *nirgends* eine Richtung zukommt, Bewegungen, von denen man mit bald ermattender Anschauung nur soviel begreift, dass sie durch immer rascher und immer kleiner werdende Oscillationen erzeugt werden. Die naive Anschauung inspirirte Sätze wie diese: Bewegung eines Punktes erzeugt eine Linie, Bewegung einer Linie erzeugt eine Fläche, Bewegung einer Fläche erzeugt einen Körper. Aber wir wissen heute, dass ein Punkt durch stetige Bewegung in der eindimensionalen Zeit auch eine zweidimensionale Fläche beschreiben, Punkt für Punkt ausfüllen kann; diese Bewegung (die Peano'sche Curve) hat allerdings mit beobachteten, anschaulichen Bewegungen verzweifelt wenig Ähnlichkeit. Ein damit zusammenhängendes Paradoxon ist folgendes: die Anschauung widerstrebt der Möglichkeit, dass aus einem Körper durch irgendwelche Zerreissung und Zusammenpressung je etwa eine Fläche oder Linie, aus einer Linie durch irgendwelche Zerstäubung und Dehnung eine Fläche oder ein Körper werden könne; wir sind a priori überzeugt, dass die dünnste Seifenblase, der feinste Spinnenfaden immer noch dreifach ausgedehnte Körper, nicht einer oder zweier Dimensionen beraubt seien. Was die geometrische Seite dieser Vorstellung anlangt – der physicalische Ausdruck ist nur der Deutlichkeit wegen gewählt –, so überzeugt uns aber das Denken vom Gegentheil.

LES MATHÉMATIQUES

DANS LES SCIENCES

BIOLOGIQUES ET SOCIALES

Anatole France raconte l'anecdote suivante :

« Étant, il y a quelques années, dans une grande ville d'Europe que je ne nommerai pas, je visitai les galeries d'histoire naturelle en compagnie d'un des conservateurs qui me décrivait les zoolithes avec une extrême complaisance. Il m'instruisit beaucoup jusqu'aux terrains pliocènes. Mais, lorsque nous nous trouvâmes devant les premiers vestiges de l'homme, il détourna la tête et répondit à mes questions que ce n'était point sa vitrine. Je sentis mon indiscrétion. Il ne faut jamais demander à un savant les secrets de l'univers qui ne sont pas dans sa vitrine. Cela ne l'intéresse point. »

* * *

S'il est permis à un esprit fin mais quelquefois paradoxal comme France de conclure que les savants sont les gens les moins curieux du monde, et que rien ne les intéresse hors de leur vitrine, nous nous garderons de risquer une telle affirmation ; nous considérerons plutôt l'anecdote précédente comme symbolisant la répugnance naturelle et souvent justifiée des savants à exposer des idées et des affirmations hors du champ où se développent habituellement leurs pensées et où leur activité scientifique a coutume d'évoluer.

Les hommes de science sont très curieux de voir au dehors d'eux-mêmes et loin ; ils désirent vivement fouiller dans la vitrine d'autrui, ne serait-ce que pour apprécier la valeur de la leur propre. Chez quiconque s'est consacré à l'étude des mathématiques, cette curiosité et ce désir sont plus grands encore que chez ceux qui s'occupent de toute autre science.

Le mathématicien est en possession d'un instrument admirable et précieux, créé, à travers une longue suite de siècles, par l'énergie accumulée des génies les plus subtils et des esprits les plus sublimes qui aient jamais existé; il possède, pour ainsi dire, la clef qui permet d'ouvrir une porte à la compréhension de certains mystères obscurs de l'univers, et un moyen de résumer en symboles succints la synthèse qui embrasse et relie les résultats vastes et disparates de sciences variées. Tandis qu'il consacre les forces de son génie à perfectionner ses méthodes et à les rendre aptes aux recherches les plus délicates et à la compréhension toujours plus vaste des faits, il est pressé par une foule toujours croissante de savants qui lui demandent aide et attendent souvent de lui plus qu'il ne peut fournir.

Il n'est donné qu'à de rares esprits, habitués aux spéculations les plus élevées, de planer dans la sphère des nombres et des conceptions abstraites de la géométrie et de la logique, indifférents et étrangers à tout ce qui s'agite, vit et se transforme autour d'eux, travaillant, selon le mot de Jacobi, « pour la seule gloire de la pensée humaine ». Chez la plupart des mathématiciens, au contraire, s'éveille le désir naturel de diriger leur esprit hors du cercle de la pure analyse mathématique, de s'informer afin de comparer le succès des différents moyens dont elle dispose et de les classer en vue des applications pour employer son activité à perfectionner les méthodes les plus utiles, à renforcer les plus faibles et à en créer de plus puissantes.

C'est surtout à propos des sciences dans lesquelles les mathématiques ont tout récemment tenté de s'introduire, je veux parler des sciences biologiques et sociales, que la curiosité est la plus intense, d'autant plus que le désir est vif de s'assurer si les méthodes classiques, qui ont donné de si beaux résultats dans les sciences mécanico-physiques, sont susceptibles d'être transportées avec un succès égal dans les champs nouveaux et inexplorés qui s'ouvrent devant elles.

* *

C'est en cédant au désir de communiquer l'impression que peut éprouver un mathématicien devant quelques-unes de ces

nouvelles tentatives, comparées avec les applications classiques des mathématiques, que je me permets de sortir du cercle de mes travaux, regrettant de ne pouvoir traiter qu'une partie limitée du sujet.

Avant toutes choses, je crois utile d'éclaircir un point délicat : Si les uns attendent trop peu de secours des mathématiques, d'autres leur en demandent trop, c'est ce qui explique la froide défiance des uns et l'enthousiasme ardent des autres pour leurs nouvelles applications. Il est vrai qu'elles ne rendent que ce qu'on leur donne et que l'analyse n'ajoute rien d'essentiel aux postulats qui constituent la substance de tout développement mathématique, mais il n'en est pas moins reconnu que les mathématiques sont le moyen le plus efficace pour atteindre aux lois générales et le guide le plus sûr permettant d'imaginer de nouvelles hypothèses et de perfectionner ces postulats même qui sont la base de toute étude. Elles offrent, en effet, le moyen le plus parfait pour essayer les postulats et les transporter du domaine de l'abstraction dans celui de la réalité; il n'y a rien de supérieur au calcul pour comparer, avec exactitude, leurs conséquences les plus lointaines aux données de l'observation et de l'expérience.

Mais l'histoire de la Science révèle une collaboration encore plus efficace et plus directe des mathématiques à la perception et à la compréhension de la nature.

Lorsque, par le calcul, nous parvenons à établir l'allure précise de deux phénomènes différents en apparence et que nous constatons une identité dans la manière dont ils se produisent, ou, comme disent les mathématiciens, que nous trouvons qu'ils sont régis par les mêmes équations, nous sommes souvent bien près d'en conclure que les deux faits constituent deux apparences d'un seul et même fait.

Tel fut le procédé par lequel Maxwell parvint à reconnaître que les perturbations électro-magnétiques et la lumière sont identiques, découverte qui ouvrit la voie aux mémorables recherches de Hertz, qui eurent tant d'influence sur la physique contemporaine et inspirèrent les inventions pratiques de Ferraris et de Marconi.

Personne, par suite, ne peut prédire au géomètre quel vaste horizon il pourra découvrir au bout du sentier épineux et étroit que le calcul lui fait suivre.

Lagrange lui-même aurait-il pu soupçonner, quand il édifia la mécanique analytique, qu'il ne créait pas seulement une méthode puissante dans les questions de la science du mouvement et de l'équilibre, mais que ses formules deviendraient un jour, aux mains d'hommes de génie comme Maxwell et Helmholtz, capables d'embrasser et de dominer tous les phénomènes du monde physique?

* * *

Et pourtant, quelle que soit l'importance de l'analyse, il est nécessaire d'en limiter la portée à son juste degré.

Les mathématiciens de profession sont fâcheusement séparés du reste du monde par une barrière de symboles qui donnent un aspect mystérieux à leurs élucubrations et à leurs œuvres, à tel point que ceux qui ne sont pas initiés aux secrets du calcul algébrique, ont quelquefois l'illusion que leurs procédés sont d'une nature différente de ceux dont dispose le raisonnement ordinaire.

C'est là une erreur analogue à celle que commettent beaucoup de personnes sur la puissance d'une machine dont le mécanisme est caché et obscur.

Cependant, entre le raisonnement grossier qui dans certains cas fait prévoir, sans le secours du calcul, l'allure d'un phénomène naturel et le raisonnement subtil du géomètre parvenant à le préciser, il n'y a pas la différence qu'on pourrait croire au premier abord.

Le procédé subtil du géomètre, s'appuyant sur un ensemble compliqué de symboles, éveille souvent l'étonnement même des mathématiciens les plus exercés et les plus rompus aux recherches analytiques, mais, si nous examinons les choses avec soin, nous verrons que ce n'est pas autre chose au fond que le raisonnement primitif et grossier plus perfectionné et plus affiné. Et l'on peut dire en outre que, dans l'esprit du géomètre, ce premier raisonnement grossier a précédé le calcul et l'a guidé, lui montrant à peu près où il doit arriver et ce qu'il lui est permis de tenter.

Dans une certaine mesure, il représente l'armature brute sur laquelle est construit tout l'édifice analytique. Mais quand nous voyons le travail achevé, nous nous trouvons en présence d'un

monument magnifique déjà dépouillé de ses échafaudages et de ses supports. Les soutiens qui ont servi à supporter la coupole en construction ont disparu et elle apparaît aux yeux émerveillés de ceux qui la contemplent comme un miracle de construction.

Concluons de là qu'il ne faut pas accueillir, avec une espérance exagérée, toute nouvelle tentative de soumettre au calcul des faits de nature quelconque; mais qu'aucune ne doit être accueillie avec indifférence.

* * *

Le passage d'une science de la période que nous appellerons prémathématique à celle où elle tend à devenir mathématique, est caractérisé de la façon suivante : les éléments qu'elle étudie cessent d'être examinés au point de vue qualitatif pour l'être au point de vue quantitatif; par suite, dans cette transition, les définitions qui rappellent seulement à l'esprit l'idée des éléments sous une forme plus ou moins vague cèdent la place aux définitions et aux principes qui les déterminent en indiquant le moyen de les mesurer.

Par exemple, quel rôle joue dans la mécanique newtonienne le concept primitif de force exprimé par les mots : « La force est la cause du mouvement » ? Ce concept s'évanouit, tandis que tout l'intérêt se concentre sur les deux premières lois qui donnent le moyen de mesurer la force.

Enfin, dans quelques tentatives modernes pour réformer la mécanique, ce terme même de force, cet ultime résidu d'anthropomorphisme dans le monde inorganique, a été supprimé et remplacé par les éléments dont la combinaison en fait connaître la grandeur.

En vertu de ce souvenir classique et d'autres analogues que nous pourrions également citer, nous saluons avec joie la tentative de Galton pour mesurer numériquement certains éléments de la théorie de l'évolution organique, comme l'hérédité ou les variations [1].

[1] *Natural Inheritance*, par Francis Galton. Londres, 1889. Dans un court mais très intéressant article où il esquisse l'histoire de ces études (*Science* N. S., vol. XII, nº 310), M. Davenport remarque que Galton a été poussé vers ces recherches principalement par les travaux de Quételet.

Sans doute Galton n'a tenté dans cette voie qu'un premier pas; nous devons peut-être rappeler quelques critiques adressées à ses résultats et avouer qu'il y aura beaucoup à modifier à ce qu'il a fait; mais il nous faut cependant reconnaître que l'aube d'un nouveau jour se lève quand nous voyons surgir la méthode qu'il a inaugurée.

Pourtant, traduire en langage arithmétique et géométrique les faits de la nature, c'est plutôt ouvrir la porte aux mathématiques que donner le moyen de mettre en œuvre les instruments de l'analyse.

Étudier les lois suivant lesquelles varient les grandeurs susceptibles de mesure, les idéaliser en les dépouillant de certaines propriétés ou en leur en attribuant d'autres de façon absolue, et établir une ou plusieurs hypothèses élémentaires qui régissent leurs variations simultanées et complexes, c'est là l'indice du moment où se jettent réellement les bases sur lesquelles on pourra construire l'édifice analytique tout entier.

Et c'est alors qu'éclate la puissance des méthodes que les mathématiques mettent largement à la disposition de ceux qui savent s'en servir.

Les économistes ont pu, par exemple, se rendre compte, quoique leur science en soit encore à ses débuts dans cette voie, avec quelle simplicité de moyens elles conduisent à représenter, comme dans un tableau d'ensemble, le mécanisme qui lie les éléments du monde économique entre eux, et comment le calcul algébrique exprime la grandeur des changements de chacun en fonction des variations de certains d'entre eux ou des conditions dans lesquelles ils se trouvent; tandis que l'économie prémathématique n'atteint jamais à la vision complète du tableau, étant forcée de se borner à l'étude de chacune de ces relations isolée des autres.

Donc, établir des concepts de façon à pouvoir introduire la mesure et par des mesures découvrir des lois, remonter de celles-ci aux hypothèses, en déduire au moyen de l'analyse une science raisonnant d'une manière rigoureusement logique sur des êtres idéaux, en comparer les conséquences à la réalité, rejeter ou transformer, dès que se présente une contradiction entre les résultats du calcul et le monde réel, les hypothèses fondamentales déjà utilisées, et parvenir ainsi à deviner des faits nouveaux et des analogies nouvelles, ou encore à déduire de l'état présent ce que fut le passé et ce que sera l'avenir; voilà, aussi brièvement que possible, comment on peut résumer la naissance et l'évolution d'une science ayant le caractère mathématique.

Le chemin est long, rude et parsemé de difficultés. Songeons que les vestiges les plus reculés de la civilisation humaine nous transmettent des traces non équivoques de mesures astronomiques effectuées par les peuples primitifs; et cependant la mécanique céleste ne compte pas plus de trois siècles d'existence. Il est donc tout naturel que les résultats obtenus par le calcul dans les sciences qui étaient hier dans la période prémathématique et qui ont besoin encore de nombreux efforts pour en sortir, soient encore limités au gré de nos désirs et de nos exigences peut-être exagérées.

* * *

Examinons maintenant les méthodes de l'analyse et regardons-les aux prises avec les nouvelles questions où l'on a tenté de les introduire.

Parmi les sciences physiques il en existe une qui fut toujours à la tête de toutes les autres, qui guide les autres, lesquelles l'imitent et la prennent comme exemple.

C'est de la mécanique que je veux parler. Elle constitue avec la géométrie la partie, sinon la plus brillante, tout au moins la plus solide et la plus sûre de nos connaissances.

Or, sinon parmi les sciences biologiques, du moins parmi les sciences sociales, nous pouvons trouver une branche de recherches, savoir l'économie pure, qui est venue se mouler sur la mécanique, a employé ses procédés, s'est servi de ses méthodes et est arrivée à des résultats analogues.

La mécanique, comme les sciences physiques et l'économie, doit son succès à l'emploi de la méthode infinitésimale qui constitue l'instrument analytique le plus délicat et en même temps le plus puissant qui ait jamais été imaginé.

Ce n'est point ici le lieu d'expliquer l'essence de l'analyse infinitésimale, même en se bornant à mettre à nu le squelette sur lequel est construite la superbe et noble création de Leibniz et de Newton. Cet exposé m'entraînerait trop loin.

Je dirai seulement que les phénomènes naturels, de quelque espèce qu'ils soient, se présentent au premier abord avec une apparence complexe. Celui d'aujourd'hui est la conséquence de tous ceux qui ont eu lieu dans le passé. Les modifications qu'on vérifie en un point de l'espace sont liées à celles que l'on observe dans tous les autres endroits. Vouloir découvrir d'un seul coup ces lois cachées, vouloir les dominer et les embrasser toutes d'un seul regard, c'est là une œuvre qui au premier abord semble non seulement difficile, mais impossible, bien qu'elle paraisse indispensable pour se former une idée complète des phénomènes.

Comment la méthode infinitésimale réussit-elle à débrouiller un tel chaos, qui nous entoure de toutes parts et semble défier tout effort pour l'analyser ?

Imaginons la succession des événements dans un temps infiniment court et dans un espace également infinitésimal. Il devient alors possible de distinguer dans les changements des éléments variables les parties prédominantes de celles qui sont négligeables. On pourra alors en mesurant les premières ou en établissant entre elles des relations, déduire de ce qui est arrivé dans un certain moment et dans un certain endroit, ce qui aura lieu en tous temps, et partout où les lois élémentaires sont satisfaites.

Fixer ces lois élémentaires s'appelle *poser des équations différentielles ;* les résoudre, c'est-à-dire calculer de proche en proche tous les éléments inconnus, s'appelle les *intégrer*.

Le géomètre peut exécuter cette dernière opération, même s'il ignore, comme il arrive souvent, la question concrète que les formules visent et à laquelle elles serviront ; de même que le mineur obscur et patient perdu dans les entrailles de la terre enrichit l'humanité de trésors d'énergie, bien qu'il ignore si le combustible, qu'il extrait péniblement du sol, servira à donner la vie à une industrie, à faire resplendir nos nuits de mille feux, ou à diriger un bateau vers les mers lointaines.

* *

C'est, par exemple, en vertu du calcul infinitésimal que nous pouvons suivre le mouvement des astres, énoncer la loi de vibration des cordes d'une harpe et calculer les effets des

machines les plus puissantes ; c'est également par ce moyen que les équations différentielles de l'économie ont été posées.

Une comparaison entre la mécanique et l'économie se présente d'elle-même. Cherchons, dans ce but, à imaginer l'impression que peut ressentir, en étudiant l'économie[1], un savant habitué à la mécanique.

Le concept de l'*homo œconomicus*, qui a donné lieu à tant de discussions, qui a soulevé tant de difficultés et qui trouve toujours des cerveaux rebelles à l'accepter, semble à notre savant chose si naturelle, qu'il éprouve une véritable surprise de l'étonnement plein de défiance suscité chez quelques-uns par cet être idéal et schématique. Il voit dans l'*homo œconomicus* un concept analogue à ceux qu'une longue habitude lui a rendu familiers. Il est en effet accoutumé à idéaliser, en regardant les surfaces comme sans frottement, les fils comme inextensibles, les corps solides comme indéformables et il a l'habitude de substituer aux fluides de la nature les liquides et les gaz parfaits.

Et non seulement il a l'habitude de tout cela, mais il connaît l'avantage que présentent ces conceptions.

S'il continue à s'avancer, il s'aperçoit que, aussi bien dans sa science qu'en économie, tout se réduit à un jeu de tendances et de liaisons, celles-ci limitant l'action des premières qui, par réaction, engendrent des tensions. De cet ensemble naît, tantôt l'équilibre, tantôt le mouvement, d'où une statique et une dynamique dans l'une et l'autre science.

Nous avons déjà touché aux vicissitudes traversées par l'idée de force en mécanique : des sommets de la métaphysique elle est descendue dans le domaine des grandeurs mesurables. En économie l'heure est passée de parler avec Jevons d'expression mathématique de grandeur non mesurable[2].

[1] Cf. *Principii di economia pura*, par Matteo Pantaleoni. Florence, 1890.
Scritti varii di Economia, par Matteo Pantaleoni. Palerme, 1904.
Mathematical investigations in the theory of value and prices, par le Dr Irving Fisher (*Trans. of the Connecticut Academy*. Vol. IX. Juillet 1892).
Une exposition du modèle mécanique imaginé par Fisher a été faite par le Col. E. Barone dans le vol. VIII, série 2 du *Giornale degli Economisti*.
Dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques* (Leipzig, Teubner), dont va paraître l'édition française, M. Pareto a publié (1902) un article très intéressant sur *l'application des mathématiques à l'économie politique*, où sont résumées les idées fondamentales, les différentes théories et les principaux résultats sur ce sujet et où l'on trouve aussi une riche bibliographie.

[2] *The theory of political Economy*, par W. Stanley Jevons. Londres, 1888. Il est très

M. Pareto, au lieu de partir directement du concept d'*ophélimité*, comme il faisait dans son *Cours d'économie politique* [1], propose maintenant de partir d'une notion purement quantitative par les courbes d'indifférence, qui correspondent assez bien aux courbes de niveau et aux surfaces équipotentielles de la mécanique [2].

Les théories moléculaires et atomiques conduisent à concevoir comme discontinue la constitution intime des corps ; Cauchy, Lamé et tous ceux qui ont établi la théorie mathématique de l'élasticité, dont la grande portée et les applications pratiques se révèlent tous les jours, ne purent parvenir à leur but qu'en passant, par un trait de génie, du discontinu au continu. Or, comme les créateurs de la théorie de l'élasticité ou comme Fourier dans la théorie de la chaleur, les économistes supposent que la quantité de biens dont chacun peut disposer, quantité discontinue par sa nature, varie par degrés continus.

Finalement, notre savant reconnaîtra dans le procédé logique employé pour obtenir les conditions de l'équilibre économique, le raisonnement par lequel il établit le principe du travail virtuel, et quand il se trouvera devant les équations différentielles de l'économie, il éprouvera le désir de leur appliquer les méthodes d'intégration qu'il connaît [3].

Voilà donc une discipline, appartenant au domaine des disciplines morales, qui, tout en conservant son originalité, s'assimile les méthodes mathématiques et, dans la brève période écoulée depuis l'apparition des œuvres de Whewell, Cournot, Gossen et Walras [4] a tâché de les appliquer.

intéressant de suivre l'origine des idées de Jevons, qu'on peut rattacher à celles de Laplace et des Bernoulli et selon M. Pantaleoni, aux études que Jevons a faites sous la direction de De Morgan (Voir l'article : *Contributo alla teoria del riparto delle spese pubbliche* inséré dans : *Scritti varii di Economia politica* qu'on a déjà cités).

[1] *Cours d'économie politique professé à l'Université de Lausanne*. Lausanne, 1896.

[2] *Sunto di alcuni capitoli di un nuovo trattato di economia politica*, par le prof. Pareto. *Giornale degli Economisti*. Série II, année XI, vol. XX. Voir l'article cité de l'*Encyclopédie des sciences mathématiques*, §§ 3 et 4. Voir aussi l'Appendice du « *Manuale di Economia politica* » que M. Pareto vient de publier (Milano, Societa editrice libraria).

[3] M. Scorza a fait tout récemment des remarques sur la manière de poser la question mathématique (*Giorn. d. Econ.*, avril 1902).

[4] Les mémoires les plus anciens d'économie politique de ces auteurs sont :

*
* *

Bien que d'un intérêt de jour en jour plus grand, les applications des mathématiques aux sciences biologiques sont aussi à leur début.

Il s'est formé, il est vrai, en Allemagne, sous la direction d'un homme de grand talent, une école ayant pris le nom d'école biomécanique, mais jusqu'à présent on n'y reconnaît pas les caractéristiques d'une phase vraiment mathématique [1].

Il y a pourtant des branches de la physiologie, comme l'optique et l'acoustique physiologiques, auxquelles des savants comme Helmholtz ont apporté la contribution, non seulement de leur génie, mais de leur science universelle en grande partie mathématique [2] ; il y a aussi ce qu'on peut appeler la thermodynamique physiologique [3] ; il y a les études classiques des Weber sur la circulation du sang et sur le mouvement des fluides dans les vases élastiques et contractiles et les études de mécanique physiologique sur la marche, la course et le saut [4] et bien d'autres que je ne citerai pas. — Dans toutes ces ques-

Whewell William. *Mathematical Exposition of some doctrines of Pol. Econ.* (Cambridge Phil. Trans. Vol. VIII, 1829.)

Cournot (Antoine-Augustin). *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, 1838.

Gossen Hermann Heinrich. *Entwickelung der Gesetze des menschlichen Verkehrs und der daraus fliessenden Regeln für menschliches Handeln*. Braunschweig, 1854.

Walras (Marie-Esprit-Léon). *Éléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale*. Paris, 1874.

Léon Walras est fils de l'économiste Antoine-Auguste Walras, auteur de l'ouvrage : *De la nature de la richesse et de l'origine de la valeur*. Paris, 1831.

Pour trouver les traces les plus anciennes des idées et des principes de l'économie mathématique, il faut remonter à Ceva Giovanni (né 1647 ou 1648), mathématicien et ingénieur hydraulique. Le titre de son ouvrage économique est le suivant : *De re nummaria quoad fieri potuit geometrice tractata, ad illustrissimos et excellentissimos dominos Praesidem. Quaestoremque huius arciducalis Caesarei Magistratus*. Mantoue, 1711.

Cf. l'article de M. Pantaleoni sur Giovanni Ceva dans le *Dictionary of Political Economy*, édité par R.-H. Inglis Palgrave. Londres, 1894.

[1] Voir Wilhelm Roux. *Gesammelte Abhandlungen über Entwickelungsmechanik der Organismen*. Leipzig, 1895.

[2] Helmholtz Hermann. *Handbuch der physiologischen Optik*. Hambourg, 1894.

Die Lehre von den Tonempfindungen als physiol. Grundlage für die Theorie der Musik. Braunschweig, 1877.

[3] Cf. *Les transformations d'énergie dans l'organisme*, par André Broca (Rapports présentés au congrès international de physique réuni à Paris en 1900. T. III. Paris, 1900.)

[4] *Theorie der durch Wasser oder andere inkompressibele Flussigkeiten in elastischen Röhren fortgepflanzten Wellen von* Wilhelm Weber. (Berichte d. k. Sächs. Ges. d. Wiss. math. phys. Klasse XVIII, 1866) Cf. le mémoire de E.-H. Weber

tions l'application du calcul est très avancée et a donné déjà les résultats les plus utiles ; cependant ces recherches admirables souvent arrivées à une grande perfection, semblent plutôt appartenir à des branches diverses de la physique mathématique et de la mécanique qu'à un domaine nouveau où les mathématiques auraient trouvé une application originale.

***

Pour cette raison, laissant ces questions de côté, arrivons à des tentatives qui, à vrai dire, sont à leurs débuts, mais s'attaquent à des questions du domaine exclusif de la biologie.

Leurs résultats n'ont pas encore atteint le degré d'assurance qui se manifeste dans les recherches rappelées plus haut. Elles soulèvent encore des doutes, mais, ne fût-ce que pour cette raison, elles sollicitent au plus haut point notre curiosité.

Ces tentatives ont rapport aux questions de classification et d'évolution, questions du reste étroitement reliées l'une à l'autre, au point que les théories génétiques tendent à faire dépendre les unes des autres.

L'examen le plus superficiel suffit pour s'apercevoir que les études mathématiques, commencées dans cet ordre d'idées, présentent tous les caractères d'un premier stade de recherches ou plutôt d'une période d'orientation. En effet, nous y voyons dominer la méthode d'analogie mathématique et la méthode statistique basée sur le calcul des probabilités.

Ainsi les études de la nouvelle école qu'on appelle biométrique ne doivent pas être séparées des anciennes recherches de statistique propres aux phénomènes sociaux.

La méthode d'*analogie* n'est certainement pas nouvelle en physique mathématique.

Beaucoup d'illusions ont disparu de nos jours sur les explications mécaniques que l'on peut donner de l'Univers. Or, tandis

Ueber die Anwendung der Wellenlehre auf die Lehre vom Kreislaufe des Blutes und insbesondere auf die Pulslehre (Ibid., 1850).

Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge. Eine anatomisch-physiologische Untersuchung von W. Weber und E. Weber, 1836.

Ces études avaient été précédés par une longue série de travaux parmi lesquels il faut rappeler les profondes recherches de Borelli (*De Motu animalium*, Rome, 1680).

Pour l'École dite iatromathématique à la tête de laquelle fut Borelli, voir par exemple l'*Histoire de la médecine* de Sprengel. Paris, 1815-32.

qu'on perdait l'espoir d'expliquer tous les phénomènes physiques par des lois analogues à celle de la gravitation universelle ou par un mécanisme unique, prenait corps une idée qui compensait presque l'écroulement de cet édifice d'espérances. C'est l'idée des modèles mécaniques ; elle ne satisfait peut-être pas ceux qui cherchent de nouveaux systèmes de philosophie naturelle, mais elle suffit provisoirement à ceux qui, plus modestes, sont contentés par toutes les analogies, et plus spécialement par les analogies mathématiques, tendant à éclaircir les phénomènes naturels.

Un modèle mécanique d'un phénomène est, en effet, un appareil que l'on construit avec la seule préoccupation qu'une fois mis en mouvement, certaines de ses parties se déplacent ou se modifient en suivant les mêmes lois de variation que certains éléments dans le phénomène.

L'expérience nous apprend que les modèles ont été très utiles. Ils ont servi et servent toujours à nous orienter dans les champs de la science les plus nouveaux et les plus obscurs dans lesquels on cherche sa route à tâtons.

La tentative hardie du plus illustre astronome de nos jours, pour construire un modèle géométrique propre à l'étude des formes organiques et de leur évolution[1], doit donc être accueillie avec le même intérêt que les modèles mécaniques de Maxwell et de Boltzmann pour l'induction électrique et les cycles thermiques[2]. Aucune difficulté sérieuse ne s'oppose, en effet, à la transformation du modèle géométrique de Schiaparelli en modèle mécanique encore plus intuitif.

***

Il est cependant nécessaire, pour bien comprendre l'œuvre de l'astronome italien, d'y distinguer deux parties, celle qui concerne la représentation géométrique des variations du monde organique, et celle qui est relative à une hypothèse, sinon entièrement nouvelle, du moins exposée sous une forme nouvelle, et à laquelle l'auteur a appliqué son modèle, le mettant ainsi tout de suite à l'épreuve.

[1] *Studio comparativo tra le forme organiche naturali e le forme geometriche pure* du prof. Schiaparelli. Milan, Hoepli, 1898.

[2] Cf. *Vorlesungen über Maxwells Theorie der Electricität und des Lichtes* du Dr Ludwig Boltzmann. Leipzig, 1891.

Même les personnes qui possèdent à peine les premières notions de géométrie savent que les lignes admettent une classification. On distingue, par exemple, la droite et le cercle. Les courbes appartenant à la famille des coniques se divisent en ellipses, paraboles et hyperboles. Schiaparelli a cherché à établir un parallèle entre la manière dont peuvent se classer les courbes d'une même famille et un système quelconque d'êtres du monde organique admettant certains caractères communs et réunis sous une même division, désignée sous le nom d'ordre, classe ou règne.

Les courbes d'une même famille satisfont, tout comme les êtres organiques, aux lois de corrélation entre les parties et chacune dépend des valeurs de certains paramètres que nous pouvons supposer représentés par un point, d'où il résulte que le passage d'une forme à une autre peut être exprimé par le mouvement de ce point.

Si l'on admet qu'on peut caractériser, au moyen de paramètres analogues, la nature des êtres organiques, l'hypothèse de Darwin sur la transformation des espèces trouve une image ou un modèle dans un mouvement tout pareil, répondant d'une manière presque exclusive à la loi de sélection naturelle fondée sur la lutte pour l'existence.

Mais Schiaparelli découvre dans le monde inorganique, comme dans le monde organique, une loi générale qui le conduit à modifier l'édifice darwinien en lui adjoignant une nouvelle hypothèse, au moyen de laquelle il parvient à ce qu'il appelle le principe de l'évolution réglée ou à type fixe.

Dans le règne inorganique, il voit, en effet, émerger du fond général des phénomènes une tendance saillante à la création de types spécifiques bien déterminés et distincts les uns des autres, séries ou classes, procédant par différences notables et non par degrés insensibles, et cette même tendance lui apparaît encore plus manifeste dans le monde organique. Par suite, dans son schéma géométrique il met en évidence des séries discrètes de points, correspondant aux formes destinées à donner les types de ces espèces, qui par un concours de circonstances que nous ignorons sont seules possibles. Dans cette nouvelle hypothèse le mouvement qui représente l'évolution cesse d'être libre, comme dans la théorie darwinienne ordinaire, mais il reste lié par ces points fixes dont l'éloignement

engendrerait des réactions spéciales comparables aux forces élastiques.

Ces considérations sur des questions qui préoccupent avec tant d'insistance l'esprit contemporain, sont en relation si étroite avec le modèle géométrique, qu'on ne saurait imaginer aucun moyen de les exprimer sans recourir au langage qu'il offre spontanément.

Cette seule circonstance suffirait pour rendre la tentative de Schiaparelli digne de la plus haute considération, car ce n'est pas peu de chose que d'offrir à une science un langage, surtout quand il est puisé dans une source aussi pure que la géométrie. Combien de théories sont passées et sont ensevelies dans l'oubli dont cependant il subsiste encore des vestiges démontrant qu'elles ne sont pas passées inutiles sur la terre. Il suffit qu'elles aient formé un seul terme de notre langage pour que nous puissions dire qu'une étincelle éloignée de leur existence anime encore aujourd'hui le grand flambeau de la science, de sorte que quelque chose d'elles, traversant les siècles, vit toujours utilement.

∴

L'œuvre de Schiaparelli ne résout pas les questions anciennes ; elle ouvre au contraire une question nouvelle, qui s'ajoute à celles qui occupent déjà le champ de la biologie. Or, même les adversaires les plus acharnés de l'école biométrique ne peuvent nier que celle-ci s'est proposé de donner une réponse aux nombreuses questions qui sont nées et se pressent à la suite des conceptions grandioses de Lamarck, Geoffroy Saint-Hilaire et Darwin, partant des mesures et se servant pour les discuter, soit des méthodes déjà connues, soit de nouvelles méthodes. L'opposition cherche plutôt à atteindre des applications particulières que la méthode mathématique même qui en forme la base. Mais c'est justement celle-ci que nous désirerions mettre en évidence[1].

Personne n'a mieux indiqué que Pearson la raison pour

[1] J. Ludwig a publié dans les tomes XLIII et XLIX de la *Zeitschrift für Math. und Physik*, des bibliographies très étendues sur les études biométriques. Depuis l'année 1901 a paru à Londres le nouveau journal *Biometrika*. Son but est de recueillir et de répandre les recherches biométriques. (*Biometrika. A Journal for the Statistical study of Biological Problems*. Edited, in consultation with Francis Galton by W. F. R. Weldon, Karl Pearson and C. B. Davenport).

laquelle on s'engagea dans cette nouvelle voie et personne n'en a plus nettement précisé le but et délimité la portée[1].

Il est nécessaire, d'après Pearson, de libérer notre esprit, dans l'état actuel de nos connaissances, de l'idée d'un mécanisme de l'hérédité et de renoncer à l'espérance d'obtenir une relation mathématique entre chaque ancêtre et chaque descendant. Les causes de l'hérédité naturelle dans chaque cas spécial sont trop complexes pour pouvoir être traitées d'une façon tout à fait exacte. On doit, par suite, commencer par l'examen d'un très grand nombre de cas, et descendre après, de proche en proche, jusqu'à des classes toujours plus limitées ; et il ne faut jamais conjecturer des règles générales d'après des exemples. En d'autres termes, il faut procéder par la méthode statistique et non par la considération de cas typiques. Ceci pourra peut-être décourager aujourd'hui le médecin pratique qui, par exemple, s'intéresse plus à l'hérédité morbide d'une famille bien déterminée, qu'à une moyenne et à une probabilité s'appliquant à une classe entière de personnes. Mais, d'autre part, tout démontre que, dans l'étude de l'hérédité, comme dans celle des variations, nous nous trouvons en face d'un très grand nombre de petites causes agissant simultanément et qu'il est impossible de distinguer les unes des autres.

Il n'y a donc d'autre moyen pour s'y reconnaître que de recourir aux procédés, qui dans toutes les questions analogues ont été d'une utilité manifeste, savoir aux procédés fondés sur le calcul des probabilités.

C'est là la branche la plus singulière et la plus curieuse des mathématiques. Si nous analysons un jugement quelconque de notre esprit, nous y trouverons toujours, plus ou moins dissimulé, un calcul de probabilité. On pourrait dire, dans une certaine mesure, que l'homme le plus simple, qui attend le matin le lever du soleil doit sa foi de voir surgir le jour à une application inconsciente de la loi des grands nombres de Bernoulli. Toutefois, la science des probabilités est la seule partie des mathématiques dans laquelle les principes ne sont pas posés rigoureusement et sont constamment ouverts à la critique et à la discussion.

Sur quelles bases solides repose par exemple le théorème

[1] *Mathematical Contributions to the Theory of Evolution. III Regression, Heredity and Panmixia* par Karl Pearson (*Phil. Transactions of the R. Society of London* S. A. Vol. 189). Londres, 1897.

fondamental de la théorie des erreurs ? Et pourtant tout le monde y croit, comme le disait un jour M. Lippmann à M. Poincaré, parce que les expérimentateurs croient y voir un théorème de mathématiques, tandis que les mathématiciens le considèrent comme un fait d'expérience.

Mais, quelque créance que nous accordions à ses bases, il faut avouer que la théorie des probabilités a rendu et rend à toutes les sciences des services incalculables et incontestables. Nous serions entraînés trop loin si nous voulions les énumérer ou discuter les questions générales et les contradictions apparentes que nous venons de signaler.

Voyons plutôt sur un exemple, sans entrer dans les détails, comment la nouvelle école traite un des problèmes qu'elle s'est proposé d'examiner.

Imaginons un grand nombre d'individus d'une certaine espèce. Si leurs formes se groupent ou se condensent autour d'un type moyen, nous voyons qu'à mesure que nous nous en éloignons les individus se feront plus rares. C'est ce que Galton représente graphiquement en mesurant un organe et en construisant la courbe qui exprime la relation entre la grandeur de celui-ci et la plus ou moins grande abondance des individus correspondants. On trouve ainsi une ligne que les géomètres appellent courbe des erreurs ou de fréquence et qu'on nomme en statistique *courbe de Quételet*. Un tel ensemble d'individus prend le nom de *groupe monomorphe*.

Il peut cependant arriver qu'en construisant la courbe comme nous venons de le dire, pour un certain ensemble d'êtres, il n'en résulte pas une ligne de fréquence. Cela signifie que les individus, au lieu de se condenser autour d'un seul type, se condensent autour de deux types distincts ou même davantage, c'est-à-dire que la courbe peut se décomposer en deux ou plusieurs courbes de fréquence. Le groupe prend alors le nom de *dimorphe* ou *polymorphe*[1].

La décomposition d'un groupe polymorphe dans ses éléments constitutifs devient ainsi une question purement géométrique que Pearson a en partie résolue et elle correspond à la décomposition d'une espèce dans ses variétés[2].

[1] Cf. *Materials for the Study of Variation treated with especial regard to discontinuity in the Origin of Species*, par William Bateson. Londres, 1894.

[2] *Contributions to the mathematical theory of Evolution*, par Karl Pearson

Si nous pouvions suivre une telle décomposition en fonction du temps et voir comment se produit le passage d'un groupe monomorphe à un groupe polymorphe ou inversement, et même si nous pouvions découvrir la tendance à la décomposition et à la recomposition, nous aurions recueilli avec une précision particulière une donnée élémentaire et fondamentale de l'évolution, par laquelle les questions de variation et de régression, de continuité et de discontinuité des espèces recevraient une lumière inattendue.

Mais il y a plus : une courbe de fréquence, tout en demeurant telle, peut présenter des formes diverses ou, comme on dit, les paramètres qui la caractérisent peuvent changer. Reconnaître les variations des paramètres correspondant à un groupe et à ses sous-groupes parmi les générations successives, les corrélations entre les paramètres relatifs aux divers organes, c'est là, déjà aujourd'hui, un chapitre étendu et complexe dans lequel les considérations subtiles de Laplace et de Bravais[1] sur les probabilités trouvent d'importantes applications.

C'est de cette façon que peuvent s'établir les définitions mathématiques des éléments fondamentaux de l'hérédité et de la sélection, séculaire ou périodique, qui feront sortir ces notions de la nuit qui les enveloppe et leur assigneront des limites précises et déterminées dans notre esprit.

On a déjà obtenu dans les derniers temps sur les sujets les plus divers des résultats très intéressants. Par exemple, Pearson a trouvé que les caractères moraux se transmettent par hérédité avec la même intensité que les caractères physiques[2]. Il a découvert aussi que les races civilisées sont plus variables que les races sauvages[3].

Davenport a étudié par exemple la phylogénie et la distribu-

(*Phil. Transactions of the R. Society of London* (A), vol. 185). Londres, 1895. La solution donnée par Pearson ne vaut que pour la décomposition d'un groupe dimorphe. Tout récemment M. De Helguero a donné une intéressante simplification de la méthode de Pearson (*Biometrika*, vol. IV, nos 1 et 2, June 1905).

[1] *Analyse mathématique sur les probabilités des erreurs de situation d'un point*, par A. Bravais (*Mémoires présentés par divers savants à l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, t. IX). Paris, 1846.

[2] *On the Inheritance of the mental and moral Characters in Man and its Comparison with the Inheritance of the physical Characters*. The Huxley Lecture for 1903.

[3] *The Chances of Death and other Studies in Evolution* 2 volumes, London, Arnold.

tion géographique de certains animaux[1], Duncker la symétrie des animaux à symétrie bilatérale[2], De Vries les hybrides et les monstruosités dans les végétaux[3], Ludwig les caractères spécifiques de plusieurs espèces végétales[4], et l'on pourrait citer une foule d'autres résultats pour lesquels je renvoie aux bibliographies spéciales[5].

*
* *

Parmi les innombrables faits qui attirent l'attention du mathématicien, j'ai cherché surtout à mettre en lumière les deux plus saillants, savoir : le pas fait dans ces derniers temps par l'Économie politique, par lequel la branche de celle-ci que Descartes et Lagrange n'hésiteraient pas à appeler l'économie analytique a été constituée comme un corps de science autonome, et le début encore plus récent de la biologie dans les recherches quantitatives et statistiques.

Dans le champ des mathématiques les procédés infinitésimaux, que les économistes emploient déjà d'une main sûre, correspondent aux nouvelles études économiques; tandis qu'à la nouvelle direction de la biologie correspondent les méthodes des grands nombres et du calcul des probabilités qu'une école entière vient de renouveler.

Par le premier de ces instruments puissants et admirables,

[1] *Quantitative Studies in the Evolution of Pecten*. — Proc. of the Amer. Academy of Arts and Sc.

Comparison of some Pectens from the East and the West Coasts of the U. S. — Reprinted from the Mark Anniversary Volume 1903, etc.

[2] *Symmetrie und Asymmetrie bei bilateralen Thieren* dans les Arch. Entwickelungsmech, 1, XVII, p. 533-582.

[3] *Sur la loi de disjonction des hybrides*. — Compt. rend. de l'Acad. des Sc. de Paris, 26 mars 1900.

Sur l'origine expérimentale d'une nouvelle espèce végétale, ibidem, 1900.

La loi de Mendel et les caractères constants des hybrides, ibidem 2 févr. 1903.

Die Mutationslehre. Veit, Leipzig 1902, 2 vol., etc.

[4] *Beiträge zur Phytarithmetik*. — Bot. Centralbl. Bd : 71, 1897.

Ueber Variationskurven. — Bot. Centralbl. Bd. 75, 1898.

Variationsstatistische Probleme und Materialen. — Biom. vol. I, p. 11-29, 316-8, etc.

[5] *Die Variabilität der Lebewesen und das Gaussche Fehlergesetz*, von F. Ludwig. Zeitschrift f. Math. und Phys. 43 Bd s. 239.

Neuere Literatur über das Grenzgebiet der Biometrie, von F. Ludwig. Zeitschrift für Math. und Phys. 49 Bd. 1903, p. 269-277.

Davenport C. B. *Statistical Methods, with special reference to biological Variation*. 2me, revised edition New-York. Wiley and Sons. 1904.

notre esprit excite le regard à scruter les mystères de l'infiniment petit; par l'autre, au contraire, nous cherchons à embrasser les amples contours d'une masse infiniment grande de faits.

De même que le microscope et le télescope ont révélé à l'histologie et à l'astronomie deux mondes où l'œil ne pouvait pénétrer, de même ces méthodes mathématiques ouvrent au penseur des horizons nouveaux et inconnus; comme ces deux instruments d'optique, ces deux instruments d'analyse diffèrent en partie et se ressemblent à certains égards. Mais il y a une chose qui rend leur emploi bien autrement merveilleux que celui de tous les systèmes de lentilles imaginables, c'est que tous deux réussissent à montrer seulement ce qu'il est utile de voir, et dissimulent tout le superflu qui troublerait le regard.

Je voudrais dire encore un mot des espérances qu'on pourrait fonder sur l'emploi d'autres méthodes, telles que celles de l'énergétique, non encore utilisées d'une façon tout à fait positive dans les sciences sociales et biologiques, mais cela m'entraînerait hors du terrain sur lequel j'ai désiré rester.

Vito Volterra.

(Traduction par Ludovic Zoretti, revue par l'auteur.)

L'ENSEIGNEMENT LAÏQUE

DE LA MORALE

Mesdames et Messieurs,

Je n'ai pas à vous démontrer l'importance de la question que nous examinerons dans ces conférences du jeudi, « l'Enseignement laïque de la morale ». Il n'en est guère de plus grave dans un temps et dans un pays où l'École publique, l'École laïque, a vraiment charge d'âmes, puisque l'éducation donnée par elle sera, pour beaucoup de jeunes Français, la principale, presque l'unique source de la vie morale.

Or ce problème, qu'il est si nécessaire de résoudre, présente en ce moment des difficultés particulières. La morale, dans nos sociétés européennes, a été, depuis de longs siècles, surtout confessionnelle. En cessant de l'être, elle semble perdre son point d'appui nécessaire et rester, en quelque sorte, suspendue dans le vide. De plus, parmi les devoirs universellement enseignés, quelques-uns avaient un caractère strictement religieux, par lequel ils ont cessé de s'imposer à la conscience de beaucoup de nos contemporains, et qui les exclut d'un enseignement destiné à tous, d'un enseignement laïque et largement national. Mais la critique ou le doute, comme il était naturel, n'ont pas manqué de s'étendre à l'ensemble des préceptes traditionnels, et de là, chez les maîtres les plus réfléchis et les plus sincères, bien des embarras qui sont allés parfois jusqu'à l'angoisse. La volonté même de donner à l'enseignement de la morale un fondement « scientifique », volonté très générale aujourd'hui, a été une nouvelle cause de trouble pour la conscience de ces

[1] Conférence faite à l'*École des Hautes Études sociales*, le 14 novembre 1905

ÜBER DIE AUFGABEN UND ZIELE DER ANGEWANDTEN MATHEMATIK

VON
R. v. MISES, Berlin

[Mises, R. von (1921): Über die Aufgaben und Ziele der angewandten Mathematik;

Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik **1**, 1-15. (Auch Selecta II, 454-477)]

Es ist im Laufe des letzten Jahrhunderts, namentlich in Deutschland, Brauch geworden, der „reinen" Mathematik eine „angewandte" begrifflich gegenüberzustellen. Gehen wir aber in der Geschichte der Wissenschaften weiter zurück, so geraten wir wohl in Verlegenheit mit der Frage, wohin die Leistungen eines Archimedes oder Newton, eines Euler oder Gauss zu rechnen seien. Kann man vielleicht noch bei Gauss die einzelnen Arbeiten in solche der einen und der andern Richtung trennen, so bleibt es doch vollends unklar, ob wir Newtons Grundlegung der Differentialrechnung und der Mechanik als reine oder als angewandte Mathematik bezeichnen sollen. Auch die persönliche Einstellung des Urhebers scheint hier eine Entscheidung nicht immer zu ermöglichen: Man kennt die Überlieferung, die Archimedes als weltabgewandten Theoretiker auftreten lässt, während andrerseits feststeht, dass er beim Bau von Kriegsmaschinen sehr wohl seine Kenntnisse in den praktischen Dienst des Vaterlandes zu stellen wusste.

Die folgenden Zeilen versuchen es, das Gebiet der angewandten Mathematik, soweit dies möglich ist, logisch abzugrenzen, und unternehmen es zugleich, eine Andeutung über ihre hauptsächlichsten Problemgruppen, so wie sie sich dem heute tätigen Beobachter darstellen, zu geben. Natürlich darf Vollständigkeit in diesem zweiten Punkt so wenig erwartet werden, wie völlige Schärfe in dem ersten.

1. Abgrenzung nach aussen. Wenn wir das, was der gewöhnliche Sprachgebrauch als Anwendungen der Mathematik oder einzelner mathematischer Lehren bezeichnet, näher zu bestimmen suchen, so finden wir sofort, wie veränderlich dieser Begriff je nach dem Standpunkt des Urteilenden ist. Der Mathematiker, der die Gedankengänge der Infinitesimal-Analysis entwickelt, spricht von „Anwendung" der Differentialrechnung auf Geometrie, wenn er die naheliegendsten geometrischen Schlüsse aus seinen Sätzen zieht. Wer sich mit einem Gebiet der theoretischen Mechanik, etwa der Elastizitätslehre, befasst, für den ist diese Differentialgeometrie das mathematische oder

theoretische Hilfsmittel, das er zur Aufstellung und Erörterung seiner Gleichungen „anwendet". Der wissenschaftlich arbeitende Ingenieur wieder benutzt die Elastizitätslehre als „Theorie", um zu konkreten Festigkeitsberechnungen zu gelangen, die erst für ihn eine wirklich „angewandte" Mathematik bilden. Dann kommt erst der praktische Konstrukteur, dem auch alle Festigkeitsrechnung noch hohe mathematische Theorie ist, und der mit ganz elementaren Faustformeln- der für ihn wahrhaft „angewandten" Mathematik - die Aufgaben seines Berufes meistert. Dieser Reihe kann man leicht beliebig viele ähnlich gebaute zur Seite stellen, man denke etwa an die „Anwendung" der Analysis auf die Integration von Differentialgleichungen, die Grundgleichungen der Thermodynamik, die wärmemechanische Theorie der Dampfmaschine, endlich den Standpunkt des praktischen Dampfmaschinenkonstrukteurs; aber es lassen sich ihr auch noch an beiden Enden Glieder anfügen. Denn selbst die Sätze der Analysis bilden für den mit der Untersuchung ihrer logischen Grundlagen beschäftigten Forscher nur eine „Anwendung" und auf der andern Seite sind alle Faustformeln des Konstrukteurs noch abstrakte Theorie für den in Werkstatt oder Betrieb tätigen Techniker. Seine sachlichen Überlegungen aber müssen, auch wenn sie nur auf den „vier Spezies" des Elementarunterrichts beruhen, noch ebenso gut wie die reine Grundlagenforschung zur Mathematik im weitesten Sinne gezählt werden. So ergibt sich uns das folgende Bild:

Von den abstrakt-logischen Untersuchungen, die in das Gebiet der Philosophie hinübergreifen, bis zu den verstandesmässigen, auf Zahl und Mass gerichteten Überlegungen des Alltags ist eine Kette von vielfach ineinander geschlungenen Gliedern gespannt, die das umfasst, was wir im allgemeinsten Wortsinn als Mathematik bezeichnen. Jeder einzelne von uns ist nach Beruf, Anlage oder Neigung an eine bestimmte Stelle dieser Kette gesetzt, von der aus er für gewöhnlich nur einen mehr oder weniger kleinen Teil des Ganzen überblickt. Innerhalb dieses Teilgebietes zieht er willkürlich eine Grenze und nennt das, was links von ihr liegt, nach dem Abstrakteren hinüberweist, die „reine" Mathematik, das rechts liegende, den Übergang zum praktischen Leben vermittelnde, die „angewandte". Keinerlei absolute Trennung ist hier möglich, kein Teil des Ganzen kann völlig entfernt werden, soll die Kette ihre Spannung nicht verlieren, und jeder Streit über Berechtigung, Zweckmässigkeit und Abgrenzung muss angesichts dieser Erkenntnis verstummen.

Man kommt auch zu keinem andern Ergebnis, wenn man versucht, die reine Mathematik als die „um ihrer selbst willen" oder „als Selbstzweck" betriebene zu erklären. Denn auf jedem Gebiet kann Einsicht und Erkennt nis um ihrer selbst willen gesucht werden, und überall kann man Forschungsergebnisse auch mit andern Zielen im Auge gewinnen. Vielleicht sieht es zunächst so aus, als ob im Gegenstand der Forschung ein von vornherein

angebbarer Unterschied läge, das eine Mal wäre es etwa die Erklärung bestimmter mechanischer (physikalischer) Erscheinungen, das andere Mal die Untersuchung rein formal-rechnerischer Beziehungen, die das Interesse in Anspruch nimmt. Aber schliesslich beschäftigt sich auch die Zahlentheorie selbst mit den uns objektiv gegebenen ganzen Zahlen und die Verteilung der Primzahlen in der unendlichen Zahlenreihe bildet kein grundsätzlich anders geartetes Forschungsobjekt als etwa die Bewegung der Gestirne oder die mechanische Wirkung des elektrischen Stromes. Will man vielleicht die Zahlen selbst noch nicht als „physikalische" Objekte gelten lassen, so wird es schon sehr fraglich beim Gegenstand der Geometrie, und von da führt ein ganz stetiger Übergang zur Mechanik und weiter.

Noch ein zweiter Punkt muss aber hier besprochen werden, der die Relativität der Abgrenzung zwischen reiner und angewandter Mathematik von einer andern Seite her beleuchtet. Wenn wir heute Überlegungen, die unmittelbar auf den vier Grundrechnungsarten fussen, als Alltäglichkeit betrachten, wenn wir gewohnt sind, die Anfangsgründe der Algebra und der analytischen Geometrie, ja neuerdings auch die der Differentialrechnung als durch die höheren Schulen in weiten Kreisen verbreitetes Handwerkzeug anzusehen, so steht dem die Tatsache gegenüber, dass vor drei- bis vierhundert Jahren die vier Spezies einen Gegenstand des mathematischen Universitätsunterrichts bildeten und ein Jahrhundert später die Infinitesimalrechnung, als die eben erst geschaffene, höchste Abstraktion des Menschengeistes, kaum einem kleinen Kreis von Auserwählten verständlich war. Damals also lagen den grossen Baumeistern, deren Werke noch heute unsere Bewunderung erregen, Überlegungen, die den heutigen Ingenieuren geläufig sind, nicht nur jenseits des Gebietes der „Anwendung", sondern auch jenseits ihres Gesichtskreises überhaupt. Es ist eine interessante, hier aber nicht weiter zu verfolgende Fragestellung, wie eine solche Ausbreitung des Wissens, wie eine solche Vermehrung der Aufnahmefähigkeit des Einzelnen im Laufe der Generationen zustande kommen kann. Sicher ist, dass, von einer bestimmten Berufsstellung aus gesehen, sich die Grenze zwischen reiner und angewandter Mathematik, ja der Inhalt des mathematischen Gesichtskreises überhaupt, mit der Zeit verschiebt; die historische Entwicklung geht zweifellos dahin, ein immer steigendes Ausmass an mathematischen Theorien in einem bestimmten Bereich des praktischen Lebens zur Geltung zu bringen. Wir müssen so unserer oben gegebenen Formulierung noch hinzufügen: Die Stellung des Einzelnen gegenüber der Kette mathematischer Begriffsbildungen rückt im Laufe der Zeit -parallel mit dem Entstehen immer neuer Glieder -- in der Richtung auf das Abstrakte immer weiter vor. Diese Entwicklung wird auch durch den von manchen Seiten mit grosser Hartnäckigkeit geführten Kampf gegen das „Vordringen der

Theorie" nicht gehemmt, wie ein Vergleich der heutigen Technik mit der vor etwa hundert Jahren zeigt.

Angesichts dieses Tatbestandes zweifacher Relativität der Begriffsabgrenzung müssen wir nun eine praktische Erklärung dafür suchen, was wir hier im Folgenden unter „Angewandter Mathematik" verstehen wollen. Es ist selbstverständlich, dass wir uns auf den Boden der Gegenwart stellen, und es sei hinzugefügt: auf den Standpunkt des wissenschaftlich arbeitenden Ingenieurs. Dabei soll dieses Wort über seine landläufige Bedeutung hinaus genommen werden, als Bezeichnung für jeden, der einen praktischen Beruf auf der Höhe wissenschaftlicher Erkenntnis ausübt; auch der Volkswirtschaftler, der Versicherungstechniker, der Arzt sind „Ingenieure" in diesem Sinne. Alles das, was der Ingenieur, der selbständige Arbeiten ausführt, an mathematischen Hilfsmitteln gebraucht, aus der Analysis und Geometrie, den verschieden verzweigten Teilen der Mechanik, aus der Thermodynamik und Elektrizitätslehre, aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, das soll den Gegenstand bilden, dem die Abhandlungen und Berichte dieser Zeitschrift gewidmet sind. Da dabei die Mechanik im weitesten Sinne, deren Pflege heute fast ausschliesslich in den Händen der Ingenieure ruht, den Kernpunkt ausmacht und naturgemäss den breitesten Raum einnehmen wird, ist sie im Titel noch ausdrücklich genannt.

2. Innere Kennzeichnung.Wir haben uns nun zu fragen, in welcher Weise die „Angewandte Mathematik des heutigen Ingenieurs" in ihrer Methode der Forschung und Lehre gekennzeichnet wird. Zwei bekannte Gedankengänge drängen sich da auf und müssen zunächst kurz besprochen werden.

Felix Klein - dessen Name hier mit besonderer Verehrung genannt werden muss, weil er wie kein zweiter in der Gegenwart dem Standpunkt des Ingenieurs innerhalb der mathematischen Wissenschaft und der Mathematik als solcher innerhalb des gesamten Kulturlebens Geltung und Ansehen zu verschaffen gewusst hat - prägte den Gegensatz der Präzisions- und Approximations-Mathematik. Nur die erstere hat es mit den scharf umrissenen Begriffen zu tun, an die wir in der Schulzeit durch allmähliche Gewöhnung herankommen, die wir später exakt definieren lernen, um schliesslich zu erfahren, dass sie einem niemals abgeschlossenen Verfeinerungs- und Vertiefungsprozess unterliegen. Hierher gehören, wenn nur die einfachsten genannt werden sollen, der Begriff der mathematischen Linie und Fläche, der irrationalen Zahl, des Differentialquotienten. In der Approximations-Mathematik gibt es nur Linienstreifen von endlicher, wenn auch geringer Breite, Flächenschalen von endlicher Dicke, keinen Unterschied zwischen rationalen und irrationalen Brüchen, die Tangenten einer Linie sind Sekanten mit nahe beieinander liegenden Schnittpunkten. Und um auch ein

geläufiges Beispiel für den Unterschied in der Problemstellung anzuführen: nur in der Präzisions-Mathematik hat die Unmöglichkeit der „Quadratur des Zirkels" einen Sinn, in der Approximations-Mathematik ist sie durch Kenntnis der Zahl π (und verschiedener Näherungskonstruktionen für diese) längst erledigt.

Niemand wird verkennen, dass hier ein sehr beachtenswerter Gesichtspunkt für die Beurteilung mathematischer Begriffsbildungen aufgedeckt wurde, der auch in manchen Fällen ein Kriterium für die praktische Brauchbarkeit einer Theorie abgeben kann. Vielleicht könnte sich der Ingenieur auch ganz gut mit einem vollständigen Aufbau der Approximations-Mathematik begnügen, wenn dieser Aufbau - nicht ganz erheblich viel schwieriger und umständlicher wäre als der übliche, der sich wesentlich auf die Begriffe der Präzisions-Mathematik stützt: es liegt eben so, dass die präzisen Begriffe der Mathematik (wie übrigens die aller Wissenschaften, die bereits zu Präzisierungen vorgedrungen sind) Vereinfachungen, Idealisierungen bedeuten, die wir bei der Begrenztheit unserer geistigen Fähigkeiten nicht missen können, die der Ingenieur erst recht nicht missen kann, der nur einen beschränkten Teil seiner Kraft und seiner Zeit mathematischen Studien widmen wird. Es ist ja selbstverständlich, dass wir uns beispielsweise mit einer approximativen Lösung einer Differentialgleichung begnügen, aber auf den präzisions-mathematischen Begriff des Differentialquotienten zu verzichten, würde eine ausserordentliche Erschwerung und Verwicklung des ganzen Ansatzes und aller Methoden mit sich bringen. Andrerseits bleibt es für das Verständnis der Resultate sehr fruchtbar, wenn man sich immer gegenwärtig hält, dass schon in den ersten Ansätzen weitgehende, zum Teil willkürliche Vereinfachungen stecken.

Ein anderes kennzeichnendes Merkmal der Ingenieurmathematik, das namentlich von jenen gern hervorgehoben wird, die ihr Studiengang durch die Zeichensäle einer technischen Hochschule geführt hat, bildet die Bevorzugung sogenannter graphischer Methoden vor den analytischen. Seit Culmann seine graphische Statik als ersten Stein in dem stolzen Zukunftsbau einer „graphischen Ingenieurwissenschaft" bezeichnet hat, ist soviel Wahres und Falsches zum Lobe dieser „Sprache des Ingenieurs" gesagt worden, dass die Vorbedingungen einer unbefangenen Erörterung geradezu getrübt erscheinen, zumal hier unwägbare Einflüsse der Erziehung, Gewöhnung und der traditionellen Kampfstellung zwischen Technikern und Mathematikern mitspielen. Sachlich zerfällt der Anwendungsbereich der graphischen Methoden offenbar in zwei verschiedene Teile, die nur selten ineinander übergreifen. Das eine Mal sind es, wie z.B. in der Statik, wesentlich elementar-geometrische Aufgaben, die eine zeichnerische Lösung mit den Konstruktions-Verfahren der Präzisions-Mathematik zulassen, das ande-

re Mal handelt es sich, wie z.B. bei der zeichnerischen Integration, um graphisches Rechnen, bei dem die Darstellung willkürlicher Funktionen durch Kurven den Ausgangspunkt und das Interpolieren einer Kurve aus wenigen Bestimmungsstücken das Hauptwerkzeug bildet. Beide Gebiete haben ihre naturgemässe Begrenzung. Es ist nicht einzusehen, wie man den Gedankenkreis der Graphostatik erweitern soll auf die Behandlung von Problemen, bei denen ganz andere Dinge als elementargeometrische Beziehungen in Frage stehen, z.B. in der höheren Elastizitätstheorie oder in der Lehre vom Erddruck, und tatsächlich sind hierhergehörige Versuche, auch wenn sie von anerkannten Meistern unternommen wurden, restlos gescheitert. Solche Erweiterungs-Bestrebungen sind auch nicht ohne Gefahr, da sie dazu verleiten, viel verwickeltere Beziehungen in die einfachen Formen zu pressen, die sich mit den üblichen Konstruktionsmitteln beherrschen lassen. Weit umfassender und eines Ausbaues fähiger sind zweifellos die Methoden des graphischen Rechnens, die all dem gerecht werden können, was die numerische Rechnung zu leisten imstande ist. Darin drückt sich die Weite und zugleich die Beschränkung dieses Werkzeuges aus; denn, um ein von Gauss herrührendes Bild zu gebrauchen, die numerische Ausrechnung stellt nur die bare Münze des Zahlungsverkehres dar, grössere und weittragende Unternehmungen erfordern aber, wie man weiss, ganz anders geartete Einrichtungen, und diesen entsprechen eben die allgemeinen, grundsätzlichen Untersuchungen der Mathematik. Innerhalb des beschränkten Bereiches ihrer Anwendbarkeit wird niemand die Vorzüge zeichnerischer Verfahren, grössere Übersichtlichkeit, Anschaulichkeit, leichtere Überprüfungsmöglichkeit, leugnen (obwohl hier gewiss die Gewöhnung viel ausmacht), und es muss auch zugegeben werden, dass ihre Ausgestaltung in mancher Richtung möglich ist (s. weiter unten). Aber in den graphischen Verfahren ein wesentliches Kennzeichen aller Teile der mathematischen Ingenieurwissenschaft zu sehen, ist sicher verkehrt.

Wenn wir aus diesem, oft mit grosser Heftigkeit geführten Widerstreit der Meinungen zu einer halbwegs geklärten Auffassung gelangen wollen, so müssen wir uns nur von jeder Engherzigkeit und Kleinlichkeit frei machen. Der Ingenieur, der es mit seiner Aufgabe ernst nimmt, wird jedes Werkzeug, das ihm die - von seinem Standpunkt - „reine" Mathematik liefert, zurichten und zur Bewältigung seiner

Aufgaben benutzen. Besonderen Nachdruck müssen wir dabei auf das „Zurichten" legen. Denn daraus entspringen vielleicht die meisten Enttäuschungen und Missverständnisse, dass der Ingenieur oft meint, er müsse alle theoretischen Hilfsmittel fertig und zum unmittelbaren Gebrauch bereit aus anderen Händen empfangen. Es ist so, wie wenn man verlangen wollte, ein Lehrbuch des Maschinenbaues müsse für alle irgendwie denkbaren Arbeitsmaschinen fertige Konstruktionszeich-

nungen bringen. In Wahrheit kann die Maschinenkunde nur lehren, wie aus einem bestimmten Verwendungszweck heraus die Maschine geformt werden muss, und in ganz gleicher Weise kann der Mathematiker unmöglich die für jedes praktische Einzelproblem passende Methode oder gar Endformel von vornherein bereitstellen. Nur die genaue Kenntnis des Zieles kann auf dem letzten Stück des Weges richtig leiten.

Wenn etwas für das Verfahren innerhalb der Ingenieur-Mathematik allgemein kennzeichnend sein soll, so kann es nur dies sein: hier wird ausgegangen von einer bestimmten praktischen Aufgabe, die gelöst werden muss, und alles das aus zum Teil sehr verschiedenen Gebieten der Theorie herangezogen und angepasst, was irgendwie brauchbar erscheint. Dagegen geht der reine Mathematiker - wenigstens vom Standpunkt der Anwendungen aus gesehen - von allgemeinen, mehr willkürlich gewählten oder nur durch den augenblicklichen Stand der Wissenschaft bestimmten Fragestellungen aus, die er mit einer gewissen „Reinheit der Methode" zu behandeln sucht (wobei er sich freilich in Rücksicht auf seine andere Stellung in der Kette aufeinanderfolgender Abstraktionsstufen doch nur analog dem Techniker verhält). J. M. Rankine, der erfolgreiche Begründer der technischen Physik, sagt einmal: „Die Frage für den Ingenieur ist: Was habe ich zu tun? Und er muss sich sofort entscheiden; die Frage für den Mathematiker lautet: Was soll ich denken? Und er kann sich unbegrenzt viel Zeit lassen." Für den Mathematiker knüpfen sich an einen bestimmten gedanklichen oder methodischen Kern eine Fülle von Fragestellungen, beim Ingenieur sammeln sich um eine einzige praktische Frage herum Antworten oder auch nur Andeutungen von solchen aus allen möglichen Theorien. Vielleicht kann man am bezeichnendsten diese Verhältnisse in ferner Anlehnung an einen Ausspruch Machs so darstellen: Die wichtigste Theorie, die der Ingenieur beherrschen muss, ist die, eine unvollkommene oder unvollständige Theorie zu benutzen verstehen, solange es eine bessere nicht gibt.

Wir wollen im folgenden die Reihe der mathematischen Gebiete, die das Interesse des Ingenieurs berühren, flüchtig durchlaufen, und da und dort Fragen feststellen, deren Beantwortung oder nähere Untersuchung nach dem augenblicklichen Stand der Dinge erwünscht erscheint. Gelegentlich soll auch auf die Ergebnisse neuerer einschlägiger Arbeiten hingewiesen werden. Ein Teil der Problemgruppen wird später in den „Zusammenfassenden Berichten" unserer Zeitschrift noch genauer darzustellen sein.

3. Probleme aus der Analysis. Das Ausgangs- und Endproblem aller Analysis ist wohl dies: Mittel zu schaffen, um die Funktionswerte einer irgendwie (aber mathematisch, nicht physikalisch) definierten Funktion tatsächlich berechnen zu können. Von hier leiten sich ab und hierher münden ein alle Theorien, die die Untersuchung der Funktionen nach ihren verschiedenen Eigenschaften zum Gegenstand haben. Zwei Hauptfragen, die, jede für sich und beide in ihrer Zusammensetzung, in breitem Ausmass Behandlung gefunden haben, lassen sich hervorheben. Die eine kann man als die Aufgabe der „Funktions-Umkehrung" oder in engerer Anlehnung an die übliche Ausdrucksweise als „Gleichungs Auflösung" bezeichnen: Gegeben ist eine explizite berechenbare Funktion einer Veränderlichen (oder n Funktionen von n Veränderlichen), man soll sie „umkehren", d.h. jene Werte der Veränderlichen finden, für die die gegebene Funktion (bezw. die gegebenen Funktionen) vorgeschriebene Werte annimmt. Die zweite Hauptaufgabe besteht im „Aufbau" von Funktionen oder dem „reinen Integrationsproblem": Gegeben sind Anfangswerte und Eigenschaften im Unendlichkleinen, man soll weiter entfernte Funktionswerte bestimmen. - Die für physikalische Fragen wichtigsten und zugleich schwierigsten Probleme sind die, bei denen sich beide Fragestellungen überkreuzen, etwa so, dass die durch „Aufbau" hergestellte Funktion erst noch umzukehren ist oder ähnlich (Randwertaufgaben usf.).

Sprechen wir zunächst vom Umkehrproblem, so ist hier nur der allereinfachste Fall der „algebraischen" Aufgabe, in dem es sich um eine rationale, ganze Funktion einer Veränderlichen handelt, als hinlänglich gelöst anzusehen. Man beherrscht die Frage der Auflösung einer Gleichung n-ten Grades, sowohl nach ihrer grundsätzlichen Seite als nach der rein praktischen der tatsächlichen Berechnung der Wurzeln (1). Aber schon der Fall mehrerer Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten hat nicht die gleich eingehende, wünschenswerte Behandlung gefunden, die eine rasche Übersicht über die Lage der Wurzeln und ihre nähere Bestimmung ermöglichen würde. Noch schlimmer steht es mit dem für viele technische Anwendungen sehr wichtigen, über die Algebra hinausgehenden Fall transzendenter Gleichungen (d.h. nicht rational-ganze, Funktionen, die umgekehrt werden sollen). Hier ist nur weniges Methodische bekannt(2). Sonderfälle sind gelegentlich mit Erfolg behandelt worden(3).
Ein altes und dringendes Desideratum des Technikers bildet ein wirklicht brauchbares, vor allem übersichtliches und einprägsames Verfahren zur Auflösung eines Systems von zahlreichen linearen Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten. Was bisher an zeichnerischen und rechnerischen

(1) Vgl. z. B. C. Runge, Praxis Der Gleichungen, Leipzig, 1900.
(2) Bemerkenswert, aber nicht durchgreifend ist die Note von R. de Montessus, Comptes rendus de l'académie, 148, Paris 1909, S. 468 u. 1749. Vgl. a. Runge in Encvkl. d. mathem. W'issensch. Bd. I S.434 ff.
(3) Vgl. z. B. H. Zimmermann, Die Knickfestigkeit eines Stabes mit elastichey Querstützung, Leipzig, 1906.

Methoden vorgeschlagen wurde (4), genügt diesen Anforderungen nicht. Anzustreben wäre, dass das Verfahren in den Sonderfällen einfacher Gliederung des Gleichungssystems, die eine einfachere Auflösung gestatten, von selbst übergeht in die bekannten, in der Graphostastik usf. gebräuchlichen Konstruktionen.

Hier wären anzuschliessen, als nicht mehr ganz in die erste Hauptgruppe von Problemen gehörig, die Aufgaben der Reihenentwicklung und sonstigen Darstellungen empirisch gegebener Funktionen in vorgeschriebenen Formen. Die Technik hat in neuerer Zeit die praktische Verwendbarkeit gewisser einfacher Entwicklungen (harmonische Analyse der durch Oszillographen aufgenommenen Schwingungen) erkannt, es fehlt aber hier noch viel an der Verbreitung einfacher, den Theoretikern längst geläufiger, grundsätzlicher Erkenntnisse, z.B. über die reichen Möglichkeiten der Approximation durch Polynome usf (5).

In der zweiten Problemgruppe, der unmittelbaren Integration, sind in den letzten Jahrzehnten viele fruchtbare Vorarbeiten geleistet worden. Bei manchen praktischen Aufgaben ist man wirklich bis zu völlig befriedigenden Lösungen vorgedrungen, vielleicht darf hier als ein, freilich besonders gut liegendes, Beispiel das ballistische Problem genannt werden(6). Für umfassendere Untersuchungen wird man wohl in Zukunft auch die von Poincaré begründete „Geometrie der Differentialgleichungen" (7) heranzuziehen haben. Dass hier in vielen Fällen gerade das zeichnerische Verfahren vor dem ihm grundsätzlich gleichwertigen rechnerischen den Vorzug verdient, ist schon oben erwähnt worden. Aber, ob Rechnung oder Zeichnung, das ganze Gebiet steckt noch, trotz seines beträchtlichen Alters - denn der Ursprung der meisten Verfahren geht in die Zeit vor Erfindung der Infinitesimalrechnung zurück -in den Anfängen seiner Bearbeitung. Die Hauptursache scheint darin zu liegen, dass die mathematische Theorie noch nicht den richtigen Standpunkt zu dieser Art von Fragestellungen gefunden hat. Man tut immer so, als wäre ein „praktisches" Integrationsverfahren etwas dem Wesen nach verschiedenes von einem „analytischen", etwa in dem Sinne, dass das letztere eine allgemeine Lösung, das erstere nur eine Lösung bei gegebenen speziellen Zahlenwerten oder dergleichen liefert. Demgegenüber kann nicht genug betont werden (und ganz das gleiche ist hinsichtlich der numerischen Gleichungsauflösung zu sagen): ein Ver

(4) Vgl. etwa R. Mehmke, *Graphisches Rechnen*, Leipzig, 1917.
(5) Eine für die Anwendungen sehr brauchbare Darstellung enthält das Lehrbuch von C. Runge, *Theorie und Praxis der Reihen*. Leipzig, 1904.
(6) Vgl. z. B. C. Cranz und R. Rothe, Artillerist. Monatshefte 1917, S. 198-238.
(7) Vgl. den Bericht von H. Liebmann in Encykl. d. mathem. Wiss. Bd., III. Art. D 8.

fahren, das gestattet, von beliebig angenommenen Daten aus dem gesuchten Resultat beliebig nahe zu kommen (Konvergenz!), ist völlig „allgemein" und unterscheidet sich höchstens in der äusseren Form seiner Wiedergabe bezw. seiner Definition von einer analytischen Formel. Wenn erst diese Anschauung, die den älteren Mathematikern wie Euler oder Cauchy sicher noch geläufig war, wieder in das Allgemein-Bewusstsein der Mathematiker übergangen sein wird, wird man eine reichere Förderung dieses Zweiges der praktischen Mathematik erwarten dürfen.

Die Schwierigkeiten des gemischten Problems, das sich aus Funktions-Aufbau und Funktions Umkehrung zusammensetzt, sind so bedeutende, dass man hier über die ersten tastenden Versuche kaum hinausgekommen ist, ja dass über die

Fragestellung selbst keinerlei Klarheit herrscht. Meist verbirgt sich der Unterschied zwischen „Randwert"- und „Anfangswertproblemen" hinter dem viel unwesentlicheren zwischen gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. In den seltenen Fällen, in denen man es bei partiellen Gleichungen mit der reinen Integrationsaufgabe zu tun hat, sind fast die gleichen Methoden wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen anwendbar. Das Randwertproblem hingegen führt, wenn es numerisch behandelt wird, auf dem Wege über die Differenzenrechnung auf die Auflösung eines sehr vielgliedrigen Systems meist linearer Gleichungen; in dieser Weise sind gelegentlich praktische Aufgaben durchgeführt worden (8). Wenn man aber, wie es oft durch die Natur der Aufgabe unmittelbar nahegelegt wird, zur Ausnutzung elementar-geometrischer Beziehungen den Weg zeichnerischer Behandlung einschlägt, so ist eine wesentliche Erweiterung und Vertiefung der bei eindimensionalen Problemen verwendeten Begriffe und Verfahren notwendig; nennenswerte Versuche in dieser Richtung sind für verschiedene Aufgaben der Elastizitätslehre und der Hydromechanik unternommen worden(9). Aber es fehlt noch jeder Ansatz zu einer Systematik, jeder Überblick über die möglichen Ausgestaltungen, jede Einsicht in die Reichweite des Verfahrens. Die bisher einzige lehrbuchmässige Darstellung des Gebietes durch Massau (10) ist in jeder Richtung unzulänglich.

(8) Z. B. eine Torsionsaufgabe von C. Runge, Z. Math. Phys. Bd. 56 (1908) S. 225 - 232. Vgl. a. die demnächst in dieser Zeitschr. erscheinende Arbeit von Hencky.
(9) Für die Potentialgleichung: C. Runge, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen math, phys. Kl. (1911) S. 431-448. Für Strömungsprobleme, namentlich in der Turbinentheorie: R. v. Mises, Z. Math. Phys. Bd. 57 (1909) S. 1-120, oder Theorie der Wasserräder, Leipzig, 1908.
(10) Mémoire sur l'integration graphique des équations aux derivées partielles, Gand 1900-1903. Zur Einführung weit besser ist der Artikel von Runge und Willers in der Encyklopädie d. mathem. Wiss. Bd. II, C 2. Vgl. a. A. Willers, Graphische Integration, Sammlung Göschen, Leipzig, 1920.

Ein für die Anwendungen sehr fruchtbarer Gedanke, der von theoretischer Seite (zur Führung sogen. Existenzbeweise) beigebracht wurde, ist der der „sukzessiven Approximationen" oder der „Näherungsfolgen". Er besteht darin, dass von einer in weiten Grenzen willkürlichen Funktion als erster Näherung ausgegangen und diese dann durch wiederholtes Einsetzen in die gegebenen Gleichungen fortschreitend verbessert wird. Anscheinend ganz unabhängig von der theoretischen Begründung hat L. Vianello diesen Gedanken in Gestalt eines zeichnerischen Verfahrens zur Lösung von Stabilitätsaufgaben der Elastizitätslehre (Knickung, kritische Drehgeschwindigkeit usw.) in die Technik eingeführt(11). Nicht nur die eigentlichen Randwertprobleme sind in dieser Weise lösbar, sondern auch das Problem der „Eigenwert"-Bestimmung (das sind eben die „kritischen" Werte der Belastung, Geschwindigkeit usw.) und die in Form sogen. Integralgleichungen gefassten Aufgaben lassen in vielen Fällen mit Vorteil eine Behandlung im Sinne der „Näherungsfolgen" zu. Es ist bemerkenswert, dass in neuerer Zeit dieser Grundgedanke auch für die Probleme der beiden früher angeführten Hauptgruppen, vor allem für die reine Integrationsaufgabe, aber auch für die Auflösung endlicher

Gleichungssysteme mehr und mehr Geltung gewinnt. Vielleicht liegt hier auch der Weg, auf dem man einmal zu einer allgemeinen, den oben ausgesprochenen Forderungen genügenden Methode der praktischen Behandlung linearer Gleichungen mit sehr vielen Unbekannten gelangen wird.
Es sei noch erwähnt, dass man die Zurückführung eines Randwertproblems auf die Auflösung eines algebraischen Gleichungssystems statt auf dem unmittelbar sich darbietenden Weg der Differenzenrechnung (Einführung endlicher Differenzen an Stelle der Differentiale) auch auf zwei andere Weisen bewirken kann. Die eine besteht darin, dass man zuerst zu einer sogen. Integralgleichung übergeht, bei der die gesuchte Funktion unter dem Integralzeichen eines bestimmten Integrals steht, und dann dieses Integral durch eine endliche Summe annähert. Das andere Verfahren benutzt die Möglichkeit, die Aufsuchung der unbekannten Funktion auf die Form eines Variationsproblems zu bringen, das dann in analoger Weise in eine gewöhnliche Maximum-Minimum-Aufgabe übergeführt wird. Dieser Gedanke hat sich unter dem Namen der Ritzschen Methode schnell Eingang, auch in die Technik, verschafft, und es sind mannigfache Aufgaben auf seiner Grundlage behandelt worden. Naturgemäss haben beide Verfahren nicht denselben Umfang der Anwendbarkeit wie das grundsätzlich immer anwendbare Verfahren der endlichen Differenzen.
All diese Fragen mögen anscheinend weitab von dem Arbeitsgebiet und

(11) Z. Verein. deutsch. Ing. (1898) S. 1436.

dem Aufgabenkreis des Ingenieurs liegen. Aber was nutzt alle Theorie der Mechanik und der Physik, wenn man nicht die Werkzeuge besitzt oder zu bereiten versteht, um im gegebenen Fall die zahlenmässigen Folgerungen aus ihr zu ziehen?

4. Geometrische Fragen. Die Pflege der Geometrie, die schon im klassischen Altertum zu grossen Erfolgen geführt hatte, ist ursprünglich wohl durch die Aufgaben des Feldmessens angeregt worden. Als Grundproblem kann man vielleicht die „Konstruktionsaufgabe" ansehen: ein Raumgebilde, das durch hinreichend viel Eigenschaften definiert ist, vollständig herzustellen. Allmählich ist diese etwas einseitige Auffassung mehr und mehr zurückgetreten gegenüber einer „systematischen Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander". Im Gegensatz zur Analysis besitzt die Geometrie, und zwar erst seit neuerer Zeit, ein durchgreifendes Einteilungsprinzip: es bilden nach F. Klein immer jene Eigenschaften der Raumgebilde, die gegenüber einer bestimmten „Gruppe" von Transformationen unverändert bleiben, ein geschlossenes Untersuchungsgebiet, eine „Geometrie" für sich. So kann man heute insbesondere die metrische und die projektive Geometrie sowie die Analysis situs einander gegenüberstellen. Bei der ersten bilden die Bewegungen oder „kongruenten Transformationen" die massgebende Gruppe, bei der zweiten die Umwandlungen durch geradliniges Projizieren von einem Festpunkt aus, bei der dritten, von deren Bedeutung für die Anwendungen noch die Rede sein wird, alle Transformationen, die in bestimmtem Sinne stetig erfolgen.

Herkömmlicherweise werden zwei Gebiete der Geometrie zur angewandten Mathematik gerechnet, die sogen. „praktische Geometrie" oder Geodäsie

(Feldmesskunst) und die darstellende Geometrie, die etwa in der Lehre von der Kartenprojektion einen Berührungspunkt aufweisen. In der Geodäsie handelt es sich um metrische Aufgaben, und zwar zunächst um elementare, d.h. solche, die auf den einfachen Kongruenzsätzen für endlich ausgedehnte Figuren beruhen, dann erst, sobald auf die Krümmung der Erdoberfläche und insbesondere auf deren Abweichung von der Kugelgestalt Rücksicht genommen wird, um Fragen der Differentialgeometrie. Die Geschlossenheit dieses Problemkreises und die äusseren Verhältnisse der praktischen Anwendung haben die Geodäsie zu einem selbständigen Wissenschafts- und Berufszweig werden lassen, dessen Entwicklung ziemlich unabhängig von der der übrigen Teile der angewandten Mathematik verläuft. Eine solche Isolierung wirkt auf die Dauer niemals vorteilhaft.
Die darstellende Geometrie ist, was ihre systematische Ausbildung angeht, eng verknüpft mit der Geschichte der technischen Hochschulen, ja man kann

ihre Entwicklung geradezu als ein Symbol für diese ansehen. Hervorgegangen aus einer Sammlung praktischer Regeln, die, zum Teil unter strenger Geheimhaltung nach aussen, innerhalb enger Berufsgruppen (der „Bauhütten") von Generation zu Generation überliefert wurden, hat sie durch Monge, einen der Begründer der École Polytechnique in Paris, die feste Form eines wissenschaftlichen Lehrgebäudes erhalten, dessen Pflege den verschiedenen, später entstandenen Hochschulen überlassen blieb. Auf die Anfänge der projektiven Geometrie, die auf Poncelet, einen Mitarbeiter Monges, zurückgehen, hat die darstellende befruchtend eingewirkt. In der ersten Blütezeit der deutschen technischen Hochschulen, in den 70- und 80er Jahren des vorigen Jahrhunderts, in denen der Grund zu den meisten der heutigen theoretischen „Ingenieurwissenschaften" gelegt wurde, hat die darstellende Geometrie in der „Methodenlehre" Fiedlers in Zürich ein übergrosses Mass von projektiver Geometrie in sich hineingezogen und ist durch diese allzu theoretische Fassung ihren ursprünglichen Zielen stark entfremdet worden. Die Reaktion, die darauf eingesetzt hat und teils in einem Zurückdrängen der geometrischen Grundgedanken der Fragestellung, teils in fortschreitender Einschränkung des lehrplanmässigen Unterrichts auf diesem Gebiet besteht, wirkt heute noch fort, nachdem sie bereits weit übers Ziel geschossen hat. Denn wenn auch die unmittelbaren Aufgaben der zeichnerischen Darstellung eine weitgehende theoretische Ausbildung in der darstellenden Geometrie nicht rechtfertigen können, sie bleibt doch ein unentbehrliches Mittel der Schulung für den Bauingenieur, der dreidimensionale Baukonstruktionen, z. B. räumliche Fachwerke, wirklich beherrschen, für den Maschineningenieur, der räumliche Bewegungsvorgänge, wie sie bei windschiefen Verzahnungen, beim Hinterschleifen von Fräsern usw. auftreten, richtig verstehen will. So kann man denn nur hoffen, dass die jetzt einsetzende Neubelebung des Interesses an den wissenschaftlichen Grundlagen der Technik auch dem geometrischen Unterricht allmählich zu seinem Recht verhelfen wird.

Dann aber wird die „angewandte" Geometrie aus der Enge hervortreten müssen, die ihr heute vielfach anhaftet, um sich vor allem nach zwei Richtungen zu entfalten. Einmal bedürfen die der Präzisionsmathematik zuzuzählenden geometrischen Grundbegriffe der Mechanik, der Vektor und Tensor, die Dyade, der Stab und die Dyname, Rotor, Gradient usw., Begriffe, die gerade in der technischen Mechanik zur umfassendsten Anwendung gelangen, der anschaulichen und durchgreifenden Verknüpfung mit dem Mutterboden der Geometrie, dem sie entstammen. Wie Wertvolles es hier auf dem nur scheinbar ausgeschöpften und vielfach als „nur formal" unterschätzten Gebiete noch zu finden gibt, haben neben dem grossen

Werk von Study (12) die in ihrer Einfachheit bestechenden, schönen Arbeiten von Otto Mohr(13) gezeigt; durch beide werden die besten klassischen Überlieferungen eines Möbius, eines Chasles, aufs würdigste fortgesetzt. Von einer Ausgestaltung und Zusammenfassung all dieser Lehren darf sich insbesondere die Mechanik der Baukonstruktionen, die ja so stark geometrisch durchsetzt ist, viel versprechen. Freilich scheint es, als ob die hier erforderlichen Begabungen geometrisch anschaulicher Richtung, selbst innerhalb des Kreises der mathematisch Veranlagten, besonders selten zu finden wären.

Der zweite Punkt, auf den wir die geometrische Betrachtungsweise ausgedehnt zu sehen wünschen, fällt in das Gebiet der Approximations-Mathematik im Kleinschen Sinne. Es handelt sich um eine geordnete Entwicklung der Grundsätze und der Hilfsmittel des graphischen Rechnens, von dem oben ausführlich die Rede war. Bekanntlich hat d'Ocagne vor nicht langer Zeit durch Schaffung der Nomographie hier sehr wesentliche Fortschritte herbeigeführt (14). Man ist jetzt in der Lage, funktionale Zusammenhänge zwischen mehr als zwei Veränderlichen durch ebene Figuren zu beherrschen. Allein fast alle prinzipiellen Fragen der Nomographie harren noch der Lösung, und man wird nicht fehlgehen, wenn man von deren Klärung auch eine Erweiterung der Anwendungsgebiete erwartet. In letzter Linie liegen hier „Abbildungs"-Probleme vor, die man ja einer genügend weit gefassten „darstellenden" Geometrie unterordnen könnte; auch andere Aufgaben der zeichnerischen Rechenverfahren, z. B. die der Konstruierbarkeit unter Zuhilfenahme einer festen Kurve (analog den Steinerschen Konstruktionen mit festem Kreis), dann die schon berührten infinitesimal-geometrischen Fragen bei der Integration gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen, weisen mehr als nur äusserliche Berührungspunkte mit den Begriffsbildungen und Verfahren einer allgemeinen „Abbildungs"-Geometrie auf.

Vorhin ist auch ganz kurz der „Analysis situs" Erwähnung getan worden, jener Geometrie, die die Raumgebilde nur nach ganz allgemeinen Zusammenhangs-Eigenschaften unterscheidet: Für sie sind Kugel und Ring verschiedene Körper, aber der Kugel gleichgestellt wird jeder Körper, der, wie ein Würfel oder sonst ein einfaches Polyeder, durch einen einfachen Schnitt (d.h. einen in geschlossener Linie um die Oberfläche herumlaufenden) in zwei getrennte Teile zerfällt. Es sieht so aus und hat bisher als selbstverständlich gegolten, dass eine derartige Betrachtungsweise, die zumeist auf sehr schwierige Fragestellungen führt, für die Technik ohne jede Be-

(12) E. Study, *Geometrie der Dynamen*, Leipzig, 1903.
(13) O. Mohr, *Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik*, Berlin, 1914.
(14) M. d'Ocagne, Traité de Nomographie, Paris, 1899. Eine kurze Einführung gibt F. Schilling, *Über die Nomographie von d'Ocagne*, Leipzig, 1900.

deutung sei (wenigstens soweit von den mittelbaren Anwendungen in der Funktionentheorie abgesehen wird). Demgegenüber sei gestattet, darauf hinzuweisen, dass in einem bestimmten Zweig der Technologie, der freilich gegenwärtig noch rein handwerksmässig auf Grund überlieferter Erfahrungsregeln betrieben wird, eine ähnliche, wenn auch nicht die gleiche, Art der Auffassung geometrischer Körper zur Geltung kommt. Wir meinen die Giesserei, bezw. das Herstellen von Modellen und von Negativformen vorgegebener Gebilde. Hier ist die Aufgabe zu lösen: wie muss der herzustellende Körper in möglichst wenig Teile zerlegt werden, von denen jeder einzelne „abformbar" ist, d. h. bei Einführen in die Formmasse und Wiederherausziehen den Negativabdruck des ganzen von ihm repräsentierten Oberflächenteils des ursprünglichen Körpers hinterlässt. Beispielsweise ist es klar, dass, wie eine Kugel, jeder einfache konvexe Körper eine Zerlegung in zwei Teile zulässt, ebenso aber auch der durch Rotation einer Kugel entstandene Ring (Torus). Dagegen erfordert eine offene Kugelschale, die mehr als die Hälfte der Vollkugel umfasst, mindestens vier Modellteile, nämlich je zwei für die Aussen- und Innenfläche. Es kommt hier, wie man erkennt, durchaus nicht der gleiche Gesichtspunkt zur Geltung, der die Zusammenhangs-Eigenschaften der Analysis situs liefert, aber ein Einteilungsgrund, der ebenfalls in sehr weitem Masse stetige Gestaltsänderungen der Körper unberücksichtigt lässt. Wir führen dies mit allem nötigen Vorbehalt an, nur um zu zeigen, wie weit die Möglichkeiten wissenschaftlicher Durchdringung praktischer Handhabungen noch sind; an einen augenblicklichen und unmittelbaren Nutzen darf man da freilich nicht denken.

5. Der Aufgabenkreis der Mechanik. Die Mechanik mit all ihren Verzweigungen nimmt einen so breiten Raum in dem Arbeitsgebiet des Ingenieurs ein, dass es kaum möglich erscheint, auch nur die wichtigsten, gegenwärtig aktuellen Fragen hier zu berühren. In drei Stufen erhebt sich bekanntlich das Lehrgebäude der heutigen wissenschaftlichen Mechanik. Den Grund bildet die Newtonsche Mechanik der freien Punkte (oder kleinen festen Körper), die unmittelbar eingeprägten Kräften unterliegen; sie hat hauptsächlich in der Astronomie ihr Anwendungsgebiet gefunden und hier fast die grössten Triumphe gefeiert, die je einer Naturwissenschaft zuteil wurden. Aber schon die Bewegungserscheinungen am physischen Pendel bedurften weiterer, über die Newtonschen hinausgehender Begriffsbildungen, die, von Huyghens vorbereitet, durch Euler und Lagrange ihre systematische Ausgestaltung erhalten haben. In der Mechanik der gebundenen Punktsysteme einschliesslich der starren Körper (Mechanik endlich vieler Freiheitsgrade) ist es der Begriff der Bewegungsbeschränkung (kinematische Bedingung) und der mittelbaren oder Reaktionskraft, der die

Hauptrolle spielt(15). Fast die gesamte Lehre von den Maschinen, von ihren Bewegungen und den in ihnen wirksamen Kräften, ruht auf diesem Fundament. Endlich hat Cauchy, gestützt auf mehrere Vorgänger, einen dritten Kraftbegriff, den der flächenhaft verteilten, inneren Kräfte oder Spannungen eingeführt, der es ermöglicht, die meisten Erscheinungen an stetig deformierbaren, festen, flüssigen oder luftförmigen Körpern bis zu einem gewissen Grade zu beherrschen. Ob damit der prinzipielle Aufbau der Mechanik abgeschlossen ist, muss angesichts des weiter unten noch zur Sprache kommenden, bisherigen Versagens der Hydromechanik gegenüber ganz geläufigen Bewegungsvorgängen zum mindesten als zweifelhaft gelten.

In den engsten Rahmen der Newtonschen Mechanik fällt von Aufgaben, die den Techniker angehen, eigentlich nur das sogen. „äussere“ ballistische Problem. Es ist viel behandelt worden und gibt, wie schon erwähnt, reichlich Gelegenheit zur Anwendung praktischer Integrationsmethoden für gewöhnliche Differentialgleichungen (16). Bei der Vielfältigkeit der Anforderungen wird hier voraussichtlich noch lange nicht das letzte Wort gesprochen sein.

Der Untersuchung der Bewegungsvorgänge an Maschinen ist, wenn man etwa die Entwicklung der Statik der Bauwerke zum Vergleich heranzieht, verhältnismässig wenig Aufmerksamkeit gewidmet worden. Breiteren Raum innerhalb der technischen Literatur hat eine Zeitlang nur die kinematische Betrachtungsweise der Reuleauxschen Schule eingenommen, die aber, trotz ihrer unbestreitbar aufklärenden Wirkung, sich bald infolge der einseitigen Ausschaltung der eigentlichen Kinetik als unfruchtbar erweisen musste. Es ist erstaunlich, dass seit Poncelet (1845) und Grashof (1875/90) kaum eine nennenswerte Gesamtdarstellung der Maschinenlehre erschienen ist; hervorhebenswerte Behandlung von Einzelproblemen verdankt man J. v. Radinger für die Schwungradberechnung (17), A. Stodola für die Theorie der Regulatoren (18), H. Lorenz für den Massenausgleich (19). Dabei liegt das methodische Rüstzeug für diese Untersuchungen seit mehr als hundert Jahren in der Lagrangeschen Systemmechanik fertig vor, deren Tag noch immer nicht gekommen zu sein scheint, obgleich K. Heun seit Jahrzehnten

(15) Vergl. hierzu die in diesem Punkte vorbildliche Darstellung bei G. Hamel. Elementare Mechanik, Leipzig 1912, S. 87 ff.
(16) Reiches Material bei C. Cranz, *Lehrbuch der Ballistik*, Leipzig, 1910. Vergl. auch Fussnote (2) S. 6, sowie die demnächst in dieser Zeitschrift erscheinende Arbeit von K. Popoff.
(17) Über Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit, Wien 1892.
(18) Schweizer Bauzeitung 22 (1893) 5. 113 und 23 (1894) S. 108.
(19) H. Lorenz, *Dynamik der Kurbelgetriebe*, Leipzig 1901.

nachdrücklich auf sie hinweist (20), Wenigstens bemühen sich stets wieder Techniker mit systematisch-theoretischen Bedürfnissen, wie beispielsweise Mohr, um die Schaffung von Begriffen, mit denen sie in den Anfangselementen der Lagrangeschen Mechanik stecken bleiben. Es wäre nun dringend zu wünschen, dass allmählich der Bann gebrochen wird und jene Methoden für die Lösung der maschinentechnischen Probleme herangezogen würden; davon wird man nicht nur Erfolg in Einzelfällen, z.B. bei einer zusammenfassenden Behandlung aller Aufgaben über die Regelung des Maschinenganges, erwarten dürfen, sondern es wird zweifellos neues Licht auf die Grundfragen der Maschinenlehre, auch auf die durch Reuleaux erst nur angebahnte Systematik, fallen. In mathematischer Hinsicht kommt hier nur das „reine" Integrationsproblem gewöhnlicher Differentialgleichungen in

Frage, zudem meist für lineare oder sonstwie spezialisierte Gleichungen; Schwierigkeiten physikalischer Natur, d. h. etwa Unstimmigkeiten zwischen dem Ansatz und dem tatsächlich Beobachteten, liegen in erheblichem Masse jedenfalls nicht vor.

Der allgemeine Spannungsbegriff, der von Euler vorbereitet, von Cauchy dann endgültig präzisiert wurde, hat seinen Ursprung und bisher auch die umfassendste Verwendung in der Theorie der elastischen Körper gefunden, die bekanntlich dadurch gekennzeichnet sind, dass Spannungen und Deformationen in jedem Punkt einander wechselweise eindeutig bestimmen. Nimmt man, wie dies allgemein üblich und hinreichend genau ist, diesen Zusammenhang als linearen an, so führt die Theorie für die einfachen Körperformen und Belastungsfälle, mit denen der Ingenieur gewöhnlich zu rechnen hat, zu Ergebnissen, die sich bei einiger Beherrschung der zeichnerischen und rechnerischen Näherungsverfahren in fast allen Fällen mit jedenfalls ausreichender Genauigkeit ableiten lassen (21). Nur der dauernde Zustand gegenseitigen Missverstehens zwischen Mathematikern und Technikern hat zur Folge gehabt, dass sich eine zum grossen Teile mit der Elastizitätstheorie in Widerspruch stehende „technische Mechanik" ausgebildet hat, die den richtigen Ausgangspunkt durch angebliche „Näherungstheorien" ersetzt, wobei deren Begründung oft nur darin besteht, dass sie einfache Schlussfolgerungen, wenn auch ersichtlich falsche, gestatten. Damit soll nicht die „Baumechanik" im engeren Sinne getroffen werden, die

(20) Z. B. in dem grundlegenden Bericht: *Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik*, Leipzig, 1900. Eine ausführlichere Darstellung des ganzen Problemkreises der Maschinenlehre gibt R. v. Mises in Bd. IV der Encykl. d. mathem. W'issensch., Artikel 10 S. 153 -355.
(21) Vergl. hierzu z. B. den demnächst in dieser Zeitschrift erscheinenden Bericht über die Lösungen des Torsionsproblems von Th. Pöschl.

besser Mechanik der Stabsysteme hiesse, und aus wesentlich geometrischen Ausführungen um einen engen Kern richtiger mechanischer Vorstellungen besteht. Aber überall, wo es sich um etwas anderes als dünne Stäbe handelt, liegt ein weites, auf lange Zeit hinaus ergiebiges Arbeitsfeld der angewandten Mathematik vor: für die einzelnen Problemgruppen, wie z. B. die Schubspannungs-Verteilung beim gedrillten oder gebogenen Balken, das Gleichgewicht der belasteten ebenen Platte oder krummen Schale, die Stabilität verschieden beanspruchter Stäbe oder Schalen, die Spannungen und Formänderungen ebener Scheiben bei beliebigem Kraftangriff (Kerbwirkung) usw., die erforderlichen Rechnungen nun wirklich in dem praktisch notwendigen Umfang durchzuführen, so dass die Fragen, die in der technischen Mechanik gestellt und beantwortet zu werden pflegen, auch ihre rationelle Beantwortung tatsächlich erhalten. - Als rationell glauben wir hierbei ein Verfahren bezeichnen zu dürfen, das von einem, soweit die Beobachtung reicht, physikalisch richtigen Ansatz ausgeht und Schlussfolgerungen durch Näherungsrechnung von kontrollierbarem Genauigkeitsgrad zu gewinnen sucht.

Hier erhebt sich nun freilich der Einwand, dass die wirklichen Körper teils überhaupt nicht, teils nur in engen Belastungsgrenzen sich wie elastische verhalten. Den vor einigen Jahrzehnten unternommenen Versuch, den Abweichungen dadurch

Rechnung zu tragen, dass man an Stelle des Hookeschen linearen ein nicht-lineares Spannungs-Zerrungs-Gesetz einführt (22), kann man wohl als erledigt ansehen. Denn die eigentlichen Schwierigkeiten bestehen erst darin, dass Spannungen und Formänderungen nicht mehr in eindeutiger Wechselbeziehung stehen, sondern dass nach Verschwinden der Beanspruchung bleibende, plastische Formänderungen auftreten. Die allgemeine Theorie plastischer Körper, die schon auf Saint-Venant zurückgeht und in den anschaulichen Formulierungen Mohrs neue Förderung erhalten hat (23), ist erst in neuester Zeit durch L. Prandtl bis zur expliziten Verwertung für bestimmte Aufgaben fortgeführt worden (24). Der Wirklichkeit gegenüber bleibt aber auch die Theorie der plastischen Formänderungen noch ein gutes Stück zurück, da sie der „Verfestigung" des Materials durch die Beanspruchung, also einer gewissen „Gedächtnis

(22) Namentlich C. Bach, *Elastizität und Festigkeit*, Berlin, 1890; 8. Aufl. Berlin, 1920.
(23) S. 192-235 in den Fussn. 2. S. 8, genannten Abhandlungen Mohrs. Für den allgemeinen Ansatz und seine Begründung vergl. auch R. v. Mises, Nachr. Ges. Wissensch. Göttingen, math. phys. Kl. (1913) S. 582. Zusammenfassendes Referat in der Encykl. d. math. Wissensch. Bd IV, Art. 31, von v. Kärman und L. Föppl.
(24) Vergl. den folgenden Aufsatz sowie Nachr. Ges. Wissensch. Göttingen, math. phys. Kl. (1920) S 74.

Erscheinung", nicht Rechnung trägt. Diese wird man erst im Zusammenhang mit der elastischen Nachwirkung und den allgemeineren Ansätzen Volterras zu einer "Gedächtnis-Mechanik" (25) beherrschen können; eine genügend umfassende Theorie, die sich heute, wenigstens in allgemeinem Rahmen, wohl schon aufstellen liesse, ist bisher nicht formuliert worden. Überhaupt darf bemerkt werden, dass die reichen Möglichkeiten, die verschiedenartige Festsetzungen über die inneren Spannungen als Funktion anderer Grössen in der Mechanik der Kontinua, insbesondere der festen Körper, darbieten, bisher nur sehr wenig ausgenutzt wurden. Ausser den plastischen und den gewöhnlichen elastischen Körpern sind in grösserem Umfang nur noch gewisse elastische Gebilde mit endlich ausgedehnten Formänderungen, durch Cosserat u.a. behandelt worden (26). Einstweilen ist hier die Sammlung von Beobachtungsmaterial, da sich die heutige Physik wenig um dergleichen kümmert, die wichtigste Aufgabe der an der Weiterentwicklung der Mechanik arbeitenden Techniker.

Ganz anders als in der Elastizitätslehre steht es in dem andern klassischen Gebiet der Mechanik stetig verteilter Massen, der Hydrodynamik. Hier verfügt man noch nicht über einen Ansatz, der auch nur in den wichtigsten und scheinbar einfachsten Fällen, wie z. B. dem der gleichförmigen Strömung des Wassers in einem geraden Rohr, zu Folgerungen führte, die mit der Beobachtung in erträglichem Masse übereinstimmen. Man besitzt bekanntlich zwei Theorien, die der „idealen" und die der „zähen" Flüssigkeiten, und für jede von ihnen gibt es Gebiete, in denen sie unbestritten zur Geltung kommt; die Idealtheorie beispielsweise bei der Berechnung der freien Strahlen (vena contracta), die Zähigkeitstheorie bei der geordneten, laminaren Bewegung in engen Kanälen, in den schmalen, vom Schmiermittel erfüllten Spalten zwischen Welle und Lager usw. Auf beiden Gebieten liegen, noch wenig bearbeitete, Aufgaben der Approximations-Mathematik, ähnlich denen der Elastizitätstheorie vor. Von den meisten übrigen Bewegungen weiss man nur, dass sie „turbulent" sind, d.h. aus einer verhältnismässig ruhigen Grundströmung und darüber gelagerten, sehr unregelmässigen Vibrationen bestehen, und man kann nur mit Verwunderung feststellen, dass die Grundströmung im grossen ganzen den Bewegungsgesetzen der idealen Flüssigkeiten folgt (27). Ein neues Beispiel für die oft sehr weitgehende Übereinstimmung hat die in letzter Zeit weit ausgebil-

(25) Vergl. den Bericht von Volterra im Arch. d. Math. u. Phys. (3) 22 (1914) S. 155-182.
(26) E. und F. Cosserat, Théorie des corps déformables, Paris, 1909.
(27) Dieser Sachverhalt wird ausführlich dargestellt bei R. v. Mises, *Elemente der technischen Hydromechanik*, Leipzig, 1914, S. 29-33.

dete Theorie der Luftströmung in der Umgebung eines bewegten Tragflügels geliefert (28). Aber weder kann man aus den mechanischen Gleichungen den Grund dafür ableiten, dass bei Ausserachtlassen der Pulsationen das Verhalten der wirklichen Flüssigkeit annähernd das einer reibungsfreien wird, noch viel weniger lassen sich die Fragen beantworten, die mit dem Auftreten der Turbulenz unmittelbar zusammenhängen, vor allem die, welchen Umständen das Entstehen der Turbulenz zuzuschreiben ist (29). Nach dem gegenwärtigen Stand der Theorie muss man es als noch unentschieden ansehen, ob der Ansatz der zähen Flüssigkeiten bei genügender mathematischer Durchdringung eine Erklärung der Turbulenz zu geben vermag, etwa auf dem Wege einer entsprechenden Berücksichtigung der Wandrauheit als Grenzbedingung, oder ob die Lösung nur durch die Sprengung des Rahmens der klassischen Mechanik und Übergang zu statistischer Betrachtungsweise erhofft werden kann. Bei den grossartigen und vielfach verblüffenden Erfolgen, die der physikalischen Statistik in den letzten Jahren zuteil geworden sind, wird man vielleicht mehr der letzteren Ansicht zuneigen, die - wenn sie sich bewahrheiten sollte - von gar nicht abzuschätzender, grundsätzlicher Bedeutung für die gesamte Auffassung der Mechanik werden könnte.
So haben wir in flüchtigem Zuge den mannigfaltigen Aufgabenkreis der Wissenschaft durcheilt, die mehr als irgend eine andere eine unentbehrliche Grundlage der schaffenden Technik bildet. Die Mechanik, die einmal Lionardo das Paradies der Mathematiker genannt hat, ist für den heutigen Ingenieur das umfassendste Arbeitsfeld geworden, dessen mühevolle Bebauung ihm fast allein überlassen blieb und aus dem er, wenn auch in harter Arbeit, reichlich lohnende Früchte zieht.

6. Weitere Probleme. Schlussbemerkung. Mit den vorstehenden Betrachtungen über die Aufgaben der angewandten Analysis und Geometrie sowie der Mechanik ist die Fülle der Probleme bei weitem nicht er schöpft, mit deren Bearbeitung wir uns zu befassen haben. Die angeführten Problemgruppen sind nur insofern ausgezeichnet, als sie bei der nach der Berufsgliederung orientierten Stoffabgrenzung der verschiedenen Zeitschriften an keiner andern Stelle ihre zuständige Vertretung finden. Nun tritt aber noch eine ganze Reihe von Gebieten hinzu, die bei der heutigen Spezialisierung nicht mehr in vollem Umfang bei uns behandelt werden

(28) Vergl. besonders L. Prandtl, Nachr. Ges. Wissensch. Göttingen, math. phys. Kl. (1918) S. 107 sowie das demnächst hier erscheinende Referat von Trefftz.
(29) Über den bisherigen Stand dieser Frage unterrichtet das in dieser Zeitschr. demnächst erscheinende Referat von F. Noether.

können, die aber dem hier vertretenen Interessenkreis so nahestehen, dass sie nicht ganz unberücksichtigt bleiben dürfen.
An erster Stelle sei die mathematische Statistik genannt, die mit ihren Ausstrahlungen nach der Bevölkerungslehre und Versicherungs-Wissenschaft auf der einen, nach der physikalischen Statistik auf der andern Seite, heute nicht nur grossen Umfang, sondern hohe und immer noch steigende, wissenschaftliche und praktische Bedeutung gewonnen hat. Es scheint, dass hier eine Klärung der Grundlagen, der Wahrscheinlichkeitsrechnung, und auch ein Ausbau der Lösungsmethoden für Einzelprobleme vonnöten wäre. Beide Mängel traten z. B. in letzter Zeit zutage bei der langwierigen, nicht ganz befriedigend abgeschlossenen Erörterung über das Problem der „Iterationen", das Marbe zum Ausgangspunkt weitgehender Angriffe gegen die bisher als allgemein gültig anerkannten Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung gemacht hat (30). Beide Umstände bewirken aber auch, dass die meisten Teile der physikalischen Statistik dem logisch Denkenden einen höchst unbefriedigenden Eindruck machen und bei allen, Physikern und Mathematikern, die grössten Bedenken auslösen. Andererseits arbeitet die Statistik im engeren Sinn, namentlich in Fragen der Fehlerausgleichung, der Bevölkerungslehre und des Versicherungswesens, mit scheinbar grosser Sicherheit, indem sie eine Reihe erstarrter Formeln und Begriffe, wie das „Bernoullische Schema", das Fehlerquadrat, die normale und nicht normale Streuung und ähnliches mehr, weit über den Geltungsbereich ihrer ursprünglichen Definitionen hinaus, handhabt. In mathematischer Richtung handelt es sich heute, abgesehen von der ganz allgemein notwendigen Reinigung der Schlussweisen und Voraussetzungen, um das von Laplace zum erstenmal in Angriff genommene Problem der „Funktionen grosser Zahlen". Die Sache liegt so, dass man in den elementaren Formeln der Kombinatorik (oder eigentlich in den einfachsten Formeln der Arithmetik) die Mittel besitzt, um jedes klar gefasste Problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung - und die Statistik hat keinerlei andere Quellen, wenn sie auch manchmal meint, den Wahrscheinlichkeitsbegriff entbehren zu können - „grundsätzlich" zu lösen. Aber die Berechnung der in Frage kommenden Funktionen nach ihrer ursprünglichen Definition wird zur praktischen Unmöglichkeit, sobald die Veränderlichen die hohen Werte annehmen, die ihnen in den Anwendungen zukommen. Eine systematische, zusammenfassende Behandlung dieser Fragen, die sich dem Grundproblem der praktischen Analysis (s. oben) zwanglos unterordnen, ist seit Laplace nicht wieder versucht wor

(30) K. Marbe, *Die Gleichförmigkeit in der Welt*, München, 1916; L. v. Bortkewicz, *Die Iterationen*, Berlin, 1917. Vgl. a. R. v. Mises, Die Naturwissenschaften Bd. 7 (1919) S 168 ff.

den. Aber gerade die neueste Entwicklung der Analysis hat viel zu ihrer Förderung beigetragen (31), so dass man jetzt hoffen darf, viele bisher unerledigte Aufgaben der Statistik mit rationellen Methoden in Angriff nehmen zu können.

Wie wir die Aufgaben der mathematischen Statistik an die der Analysis anschliessen können, so verfahren wir ähnlich, indem wir den Aufgabenkreis der Mechanik soweit ausdehnen, dass er die Wärmemechanik oder technische Thermodynamik mit umfasst. Dabei wollen wir weniger an den Ursprung jener Bezeichnung, die sogenannte „mechanische Natur" der Wärme, denken als vielmehr daran, dass die Mechanik der Dampfmaschine oder anderer Wärmekraftmaschinen wesentlich lückenhaft bleibt, solange man nicht die thermodynamischen Überlegungen heranzieht, die das „Kraftfeld" der Maschine erst bestimmen. Es war wohl Gustav Zeuner, der zum erstenmal mit der bewussten Absicht, dem Maschinenkonstrukteur zu dienen, die Grundbegriffe der modernen Thermodynamik zur Erklärung der Vorgänge in der Dampfmaschine angewandt hat. In welchem Masse sich die hierhergehörigen Probleme ausgedehnt und vertieft haben, zeigt das grosse, nur einem Sondergebiet gewidmete, Werk von A. Stodola über Dampfturbinen (32), das vorbildliche Muster eines technischen Lehrbuches, das um einen Kern unmittelbar praktischer Aufgaben eine Menge fruchtbarer Gedanken aus verschiedenen Gebieten der Theorie sammelt, neue Fragestellungen anregend, alte Probleme aufklärend. Nur für den, der mit dem Inhalt dieser Forschungen gar nicht vertraut ist, muss es ausdrücklich gesagt werden, dass diese Thermodynamik weder in der „reinen", noch in der „technischen Physik" genügende Berücksichtigung findet. Denn jene, die sich noch traditionell in eine „theoretische" und eine „experimentelle Physik" gliedert, beschäftigt sich ausschliesslich damit, den Bereich der erklärbaren Naturerscheinungen zu erweitern, und ist vollauf befriedigt, sobald es gelungen ist, eine neue Gruppe von Tatsachen in ein Gedankenschema sicher einzuordnen, so etwa wie die Differentialgleichungen der Mechanik ein Schema, einen Rahmen, für die Erklärung aller Bewegungserscheinungen abgeben. Derartige Bemühungen bilden wohl eine notwendige Voraussetzung und Vorbedingung für alle technische Verwertung der Naturphänomene, doch keineswegs die einzige und hinreichende, so wenig etwa, wie die Kenntnis dessen, was den physikalischen Inhalt der Elastizitätstheorie bildet,

(31) Hierher gehören die neueren Untersuchungen über das sogenannte Momentenproblem von Stieltjes, vgl. H. Hamburger, Math. Zeitschr. Bd. 4 (1919) S .186-222 und Math. Ann. Bd. 81 (1920) S. 235-319 sowie G. Polya, Math. Zeitschr. Bd. 8 (1920) S. 171-181.
(32) A. Stodola, *Die Dampfturbinen*, 5. Aufl. Berlin.

hinreicht, um ein Bauwerk zu berechnen. Die sogenannte „technische" Physik aber ist teils nur eine Zusammenfassung der für die physikalische Technik, d.h. für die Durchführung von Experimentaluntersuchungen, in Betracht kommenden Lehren, teils erfüllt sie die Aufgaben, die wir hier für den eigentlichen Maschinenbau im Auge haben, auf bestimmten anderen Sondergebieten der Technik, z. B, dem des Apparatebaues, der Röhrentechnik usf.

Nicht unähnlich liegen die Verhältnisse auf dem auch sachlich verwandten Gebiet der Elektrotechnik und Elektrizitätslehre. Hier hat freilich der grosse Umfang der praktischen und theoretischen Aufgaben schon längst zu einer Absonderung geführt, die bei allem Nutzen und Vorteil der Arbeitsteilung auch deren Mängel zutage treten lässt. Manche Fragen des Elektromaschinenbaues, wie z. B. die des Pendelns parallel geschalteter Maschinen, sind wesentlich mechanischer Natur und die der Elektrizitätslehre angehörigen Überlegungen dienen dabei nur zur Feststellung des Kraftfeldes so, wie das oben hinsichtlich der Thermodynamik erwähnt wurde. Andere Aufgaben, wie etwa die Berechnung von Fernleitungen auf Spannungsabfall zeigen weitgehende formale Analogie mit Rechnungen ganz anderer Art (hier der Festigkeitsberechnung gebogener Balken) und auch die der Elektrotechnik besonders eigentümlichen geometrisch-zeichnerischen Verfahren (Kreisdiagramme usf.) haben schliesslich viel allgemeinere Bedeutung und können zweckmässig von weitern Gesichtspunkten aus beleuchtet werden. Am engsten werden die Beziehungen zwischen elektrotechnischen Problemen und denen aus anderen Gebieten der angewandten Mathematik dort, wo man sich nicht auf mehr weniger elementare Rechenmethoden beschränken kann, sondern auf die Differentialgleichungsansätze zurückgeht. Es ist bekannt, dass jedes elektrostatische Problem ein hydrodynamisches und vielfach auch ein elastisches Analogen hat, und wenn auch kaum sehr häufig die ganz gleichen Fragestellungen in den verschiedenen Gebieten auftreten (gewisse Abweichungen sind fast immer vorhanden), so erkennt man doch aus dem Bestehen der Analogie, dass es sich mathematisch um ganz ähnliche Aufgaben hier und dort handelt, Aufgaben, die jedenfalls mit denselben approximations-mathematischen Methoden zu behandeln sind. Es schlingt so die „praktische Analysis" ein gemeinsames Band um alle Probleme, die auf die Systeme partieller Differentialgleichungen führen, wie wir sie in ihrer einfachsten Form in der gewöhnlichen Potentialgleichung kennen. Wir meinen, dass es nur zur Förderung all der von diesen Problemen berührten Gebiete ausschlagen kann, wenn wir gegenüber der - an ihrer Stelle auch nützlichen - Spezialisierung hier eine Gelegenheit schaffen, die gemeinsamen Züge der verschiedenen Erscheinungen zu pflegen.

In der Einleitung ist die Unbestimmtheit und zweifache Relativität, die in dem Begriff der „angewandten Mathematik" steckt, ausführlich dargelegt worden. Der flüchtige Gang durch die lange Reihe verschiedenartiger Probleme, den wir haben folgen lassen, wird sicherlich das Gefühl noch verstärkt haben, dass es sich hier um ein nach aussen unsicher begrenztes, nach innen wenig geschlossenes Gebiet handelt. Was wir diesem wenig befriedigenden Eindruck entgegen zu stellen haben, ist vor allem die Berufung auf das praktische Bedürfnis, dem Sammlung und Zusammenfassung lose aneinander hängender Fragen oft mehr dienen kann, als die glatte Abrundung eines einheitlichen Kernes. Gewiss wäre es schöner und ästhetisch befriedigender, wenn wir es nicht nötig hätten, zwischen den Stoffgebieten des Mathematikers, Physikers und Technikers die Reste wahrzunehmen, die von allen Seiten unerledigt bleiben. Man kann sich auch vorstellen, dass einmal eine Zeit kommen wird, die, die einzelnen Wissenzweige in einer höheren Einheit vereinigend, ein derartiges Unternehmen überflüssig erscheinen lässt, wie ja auch den Grossen unseres Gebietes, einem Euler oder Gauss, einem Newton oder Cauchy der Zwiespalt zwischen reiner und angewandter Wissenschaft fremd war. Allein niemand kann die Zeit und die Verhältnisse, in die er gestellt und unter denen er zu wirken berufen ist, frei wählen: die Erfordernisse der Gegenwart erkennen und ihnen nach Kräften zu dienen suchen, ist äusserer und innerer Umkreis der Pflicht.

So wollen wir denn die immanente Bedeutung unserer Aufgabe, wie sie sich von einem weitausblickenden historischen Standpunkt aus darstellt, sicher nicht überschätzen. Aber wenn wir hier dem Werke, das von hervorragenden und einsichtigen Männern der letzten Jahrzehnte eingeleitet wurde, einen festen äusseren Rahmen zu schaffen versuchen, so sind wir uns doch bewusst, etwas zu unternehmen, was weder nutzlos noch geringfügig ist und dabei über die Kräfte des einzelnen nicht nur, sondern auch eines einzelnen Geschlechtes hinausgeht. Wie die Baumeister des Mittelalters ihre Bauten begannen, unbekümmert darum, dass sie sie unmöglich zu Ende führen konnten, so vertrauen auch wir, dass trotz der gewaltigen Erschütterungen unserer Zeit, trotz aller die Zukunft unserer Kultur bedrohenden Erscheinungen, sich stets die Kräfte finden werden, in dieser oder jener Form das Begonnene fortzuführen, solange es nottut. Denen aber, die aus einer Welt „reinerer" Forschung mit Misstrauen oder Geringschätzung zu uns herübersehen, rufen wir die Worte zu, die eine alte Überlieferung dem Heraklit von Ephesus zuschreibt: Entroite, nam et hic dii sunt; tretet ein, denn auch hier wohnen Götter.

DIE NATURWISSENSCHAFTEN

Zehnter Jahrgang. 13. Januar 1922. Heft 2.

Über die gegenwärtige Krise der Mechanik.

Von R. v. Mises, Berlin[1].

Es sind erst wenige Jahrzehnte her, da galt die Mechanik der sichtbaren Körper, die Mechanik der wirklich beobachtbaren Bewegungen und Kräfte, als der vollendetste, jedenfalls als ein vollkommen sichergestellter Teil unseres physikalischen Weltbildes. So stark war das Vertrauen zu dem festgefügten Aufbau der klassischen Mechanik, daß man einen beliebigen physikalischen Vorgang erst dann als völlig geklärt ansehen wollte, wenn er auf einen mechanischen zurückgeführt war. Die Philosophen, die bekanntlich gerne die Ergebnisse einer Wissenschaft, sobald sie sichergestellt erscheinen, zu übertreiben pflegen, taten auch hier ein übriges, und so setzte *Wilhelm Wundt* an die Spitze seiner Axiome der Physik den Ausspruch: Alle Ursachen in der Natur sind Bewegungsursachen. Gerade dieser enge Zusammenhang zwischen den Grundbegriffen der Mechanik und der Gestaltung unseres Ursachbegriffes berührt sich mit dem, was uns hier beschäftigen wird.

1. *Die Mechanik der Relativitätstheorie.* Den ersten ernsthaften Anstoß erhielt die Mechanik, die man fälschlich die Newtonsche nennt — denn sie stützt sich auf drei unabhängige Grundpfeiler, die Newtonsche Mechanik freier Punkte, den Euler-Lagrangeschen Systembegriff und den Cauchyschen Begriff der inneren Spannung —, den ersten Anstoß erhielt die klassische Mechanik vor etwa zwei Jahrzehnten von der Elektrodynamik her, als man sich genötigt sah, Massen anzunehmen, deren Größe von der Geschwindigkeit abhing. Bekanntlich hat die weitere Verfolgung dieses Problemkreises nach einigen Umwegen zur speziellen und dann zur allgemeinen *Relativitätstheorie* geführt. Als sich vor rund zehn Jahren die Grundgedanken der speziellen Relativitätstheorie allmählich in weiteren Kreisen durchsetzten, begann man auch viel von der „Neuen Mechanik" zu reden, die durch jene Theorie bedingt sei. Und wenn ich heute einen Vortrag über die gegenwärtige Krise der Mechanik angekündigt habe, bin ich vielleicht auch dem Mißverständnis ausgesetzt, als meinte ich damit die Relativitätsmechanik. Dem ist aber nicht so. Von dem Standpunkt, den ich hier zur Geltung bringen möchte und der den unmittelbaren Zusammenhang *rein mechanischer Beobachtungen mit bestimmten grundsätzlichen Fragen* betrifft, von diesem Standpunkt aus erscheint die Mechanik der Relativitätstheorie durchaus nicht als revolutionär; viel eher möchte ich sie als eine „überklassische Mechanik" bezeichnen, denn als eine fortschrittliche Entwicklung der alten Mechanik. Wie das gemeint ist, soll gleich etwas ausführlicher erläutert werden, da dies auch die passendste Überleitung zum eigentlichen Gegenstand meines Vortrages bildet.

Überlegen wir uns einmal, welchen Eigenschaften die klassische Mechanik ihre außerordentlich starke Stellung innerhalb der Gesamtheit der physikalischen Wissenschaften verdankt, so müssen wir erkennen, daß die ursprünglichen Ansätze sich nach zwei entgegengesetzten Richtungen entwickelt haben und daß demnach auch zwei ganz verschiedene Seiten an ihnen gewertet werden. Der *Physiker* hat eine Mechanik ausgebildet, wie sie allenthalben als erstes Kapitel in jedem Lehrgang der theoretischen Physik auftritt, und die ich für den Augenblick etwa als die „gebundene" Mechanik bezeichnen möchte. Sie erblickt das Entscheidende und Wertvolle in den Aufstellungen von *Newton, Euler-Lagrange* und *Cauchy* darin, daß durch sie zum erstenmal die *Zusammenfassung eines großen Erscheinungsgebietes* in eine enge Gruppe von Differentialgleichungen oder noch besser die Unterordnung unter ein einziges Variationsprinzip geleistet wird, ein Vorgang, der dann zum Muster für die Ausbildung der übrigen Teile der theoretischen Physik geführt hat. Aber jene alten Aufstellungen besitzen noch einen ganz andersartigen Vorteil und man wird den Verhältnissen durchaus nicht gerecht, wenn man meint, daß nur ein *methodischer* Unterschied bestünde zwischen der eben gekennzeichneten „gebundenen" Mechanik und der andern, die ich jetzt die „freie" nennen will. Für sie ist der hauptsächlichste Wert der klassischen Ansätze darin gelegen, daß sie einen sehr *lockeren, losen Rahmen* bilden, bei dessen Ausfüllung noch sehr viel Freiheit bleibt: Man kann für das, was *Newton* die vis impressa, die eingeprägte Kraft, nennt, für das, was in der Euler-Lagrangeschen Mechanik die Konstitution des mechanischen Systems ausmacht, endlich für die von *Cauchy* eingeführte Spannungsdyade in weitestem Umfang *willkürliche Funktionen* einführen, um sich der großen Mannigfaltigkeit der natürlichen Erscheinungen anzupassen, und vermag damit inhaltlich weit über die „gebundene" Mechanik hinauszugreifen. Um nur ein konkretes Beispiel zu nennen: Wenn man in einem System starrer Körper die gewöhnliche Berührungsrei-

[1] Vortrag, gehalten auf der Jahresversammlung der deutschen Mathematiker-Vereinigung in Jena am 20. September 1921.

bung mit den in der technischen Mechanik üblichen Ansätzen als wirksam ansieht, so bleibt man noch im Rahmen der Newtonschen Mechanik, aber weder die sog. Bewegungsgleichungen zweiter Art, noch das Hamiltonsche Prinzip liefern eine Lösung. In anderen Fällen, wenn man etwa die bleibenden Formänderungen eines riemenartigen Bandes oder dergleichen untersuchen will, spielen die schönen Variationsprinzipe der „gebundenen" Mechanik die Rolle leer laufender Räder einer Maschine: sie drehen sich mit, wenn man sie nicht ausschaltet, aber sie fördern das Ziel der Untersuchung nicht. Ich will also zusammenfassen: Die Gesamtheit der wirklich beobachtbaren Bewegungs- und Kräfteerscheinungen wird *bei weitem nicht durch die Mechanik erfaßt,* die der Physiker als Einleitungskapitel der theoretischen Physik zu behandeln pflegt, aber der ursprüngliche, durch *Newton, Euler, Lagrange* und *Cauchy* geschaffene Rahmen ist ein so weiter und dehnbarer, daß man mit Recht bisher annahm, er würde ausreichen, um ein Schema für die Erklärung *aller* beobachtbaren mechanischen Vorgänge abzugeben. — Dieser *inhaltliche* Unterschied zwischen den beiden Richtungen der rationellen Mechanik ist natürlich nicht ganz unbekannt, aber er wird nicht immer genügend deutlich hervorgehoben.

Betrachten wir nun von diesem Standpunkt aus die „Neue Mechanik" der Relativitätstheorie, so kann kein Zweifel bestehen, daß sie noch „gebundener" ist, als die bisherige Mechanik der theoretischen Physik. Solange nur die spezielle Relativitätstheorie in Betracht kam, ließ sich noch, wie *Minkowski* gezeigt hat, die „neue" Mechanik ganz auf die Form der alten bringen; man mußte nur die Definitionen und Axiome etwas verallgemeinern. Gewiß hat *Minkowski,* was ja von seinem Standpunkt aus nahe lag, den Hauptvorzug der relativistischen Mechanik darin gefunden, daß ihre Herleitung noch einheitlicher geschehen kann, indem auch die Kontinuitätsgleichung aus dem verallgemeinerten Energiegesetz folgt; aber es hat, denke ich, keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, die Minkowskische Mechanik in der Richtung auszubauen, wie ich sie früher als die der „freien" Mechanik gekennzeichnet habe. Ganz anders steht es, wenn wir von der allgemeinen Relativitätstheorie ausgehen. Diese ist von vornherein auf die Schwerefelder zugeschnitten, und wenn man anfänglich das sog. Äquivalenzprinzip auch beliebigen Kräften gegenüber aussprach, so ist es heute doch zumindest sehr zweifelhaft, ob *diese* neue Mechanik dieselbe Allgemeinheit von Kraftgesetzen zuläßt wie die alte. Es scheint, daß die Mechanik der Relativitätstheorie viel absoluter oder „absolutistischer" ist als die gewöhnliche, in unserer Ausdrucksweise „gebundener"; sie ist weit weniger anpassungsfähig, und dies mag in gewissem theoretischen Sinn auch eine Stärke sein. Die ganze Frage ist natürlich noch nicht im geringsten untersucht, hat man sich doch kaum eingehender damit beschäftigt, welchen Einschränkungen die zulässigen Kraftgesetze innerhalb der klassischen Mechanik unterworfen sind. Vielleicht liegt aber hier ein Teil der Gründe, die *Ernst Mach* in seiner hinterlassenen „Optik" zu so entschiedener Ablehnung der Relativitätstheorie, vor allem vom Standpunkt der Erfahrung aus, veranlaßt haben. — Freilich darf man nie vergessen, daß die Einsteinsche Theorie die Anpassung der Mechanik an das älteste und bedeutendste Erscheinungsgebiet, die Bewegung der Himmelskörper, erst vollendet hat, und alles, was ich hier gesagt habe, soll durchaus kein Urteil, noch weniger eine Aburteilung der Relativitätstheorie sein, sondern nur ihr Verhältnis zu der Frage kennzeichnen, mit der ich mich eigentlich beschäftigen will.

2. Entwicklung des Hauptproblems. Diese Frage, in deren negativer Beantwortung ich das Kritische in dem heutigen Zustande der Mechanik erblicke, lautet, auf die kürzeste Form gebracht, so: Können wir noch annehmen, daß alle Bewegungs- und Gleichgewichtserscheinungen, die wir an sichtbaren Körpern beobachten, *sich in dem Rahmen des Newtonschen und der daran anknüpfenden Ansätze erklären lassen?* Mit anderen Worten: Läßt sich jede Bewegung eines beliebig abgegrenzten Massenteils in ihrem zeitlichen Ablauf dadurch eindeutig bestimmen, daß man den Anfangszustand gibt und irgendwelche Kraft- oder Spannungsgesetze als wirksam ansieht? Vor wenigen Jahren noch hätte man kaum gezögert, die Frage mit einem glatten „Ja" zu beantworten. Auch heute sind wir nicht so weit, sie entschieden verneinen zu können, noch viel weniger können wir in allen Einzelheiten sehen, was zu den alten Begriffsbildungen neu hinzuzutreten hat. Allein ich will hier doch zu zeigen versuchen, daß der Tatsachenbestand, den wir heute besitzen, es als in hohem Maße *unwahrscheinlich* erkennen läßt, daß jenes Ziel der klassischen Mechanik je erreicht werden könnte, und daß ganz bestimmte andere, übrigens nicht mehr ungewohnte Überlegungen den starren Kausalaufbau der klassischen Theorie abzulösen oder zu ergänzen berufen sind.

Das umfassendste und geläufigste Erscheinungsgebiet, das man mit den Differentialgleichungen der Mechanik bisher nicht in Einklang zu bringen vermocht hat, stellt die *Bewegung der Flüssigkeiten* in zahllosen, der unmittelbaren Beobachtung zugänglichen Fällen dar. Wenn wir Wasser durch ein zylindrisches Rohr gleichförmig fließen lassen, so müssen wir dabei, je nach den Abmessungen, zehn-, hundert- oder tausendmal mehr Druck aufwenden, als dem Poiseuilleschen Gesetz entspricht, das eine unmittelbare Folgerung der Theorie zäher Flüssigkeiten ist. Man weiß schon seit *Poncelet* und *Saint-Venant,* daß diese Unstimmigkeit daher rührt, daß die Bewegung des Wassers gar keine gleichförmige ist, sondern sich zahllose kleine, unregelmäßige Pulsationen über eine verhältnismäßig ruhige Grundbewegung lagern. Die mechanischen Differentialgleichungen können aber ihrem ursprünglichen Sinn nach nur für die wirklichen Bewegungen aller Einzelteilchen gelten und besagen nichts über die *Scheinwerte* von Druck und Geschwindigkeit, die durch eine unbeabsichtigte Mittelwertbildung nach Ort und Zeit zustande kommen. Vom praktischen Standpunkt aus lag es nahe zu untersuchen, ob sich nicht unmittelbar Gesetze für die Grundbewegung auffinden lassen. Dies hat zuerst *Boussinesq* unternommen, indem er ein System von Differentialgleichungen gab, das sich von dem klassischen für zähe Flüssigkeiten dadurch unterschied, daß an Stelle des konstanten Reibungskoeffizienten ein passend veränderlicher „Turbulenzkoeffizient“ trat. Die Integrale dieser Gleichungen sollten Druck und Geschwindigkeit der Grundbewegung darstellen, doch sind sie der mathematischen Schwierigkeiten wegen kaum auch nur in *einem* entscheidenden Fall aufgefunden worden. Eine weit einfachere Theorie habe ich im Jahre 1908 entwickelt[2]) und ich glaube, daß sie durch alle bisherigen Erfahrungen nur bestätigt worden ist. Ihr Grundgedanke ist der: Die Geschwindigkeitsverteilung der Grundbewegung eines turbulenten Zustandes genügt dem Differentialgleichungssystem, das man aus dem Eulerschen Ansatz für ideale Flüssigkeiten erhält, wenn man daraus den Druck eliminiert (und das man das Helmholtzsche nennen kann, da es inhaltlich mit den Helmholtzschen Wirbelsätzen übereinstimmt). Daß dieses Gleichungssystem nicht eindeutig ist und daß für die Druckverteilung noch weitere Annahmen erforderlich sind, gibt nur die willkommene Gelegenheit zur Anpassung der Theorie an die Beobachtungen. Ich möchte von neueren Ergebnissen besonders die mit der Beobachtung so gut übereinstimmende Lehre vom Tragflächenauftrieb und die von der Wirbelbildung hinter einem in eine Strömung eingetauchten Körper als Bestätigungen meiner Auffassung in Anspruch nehmen.

Aber wie dem auch sei, ob die Boussinesqsche Theorie oder meine — eine dritte ist bisher nicht bekannt geworden — die Erscheinungen besser wiedergibt, mit der eigentlichen Mechanik im klassischen Sinne hat das nichts zu tun. Denn diese erhebt den Anspruch, gerade die vielfältig verwirrte Bewegung der *Einzelteilchen* erklären, also vor allem in ihrem zeitlichen Ablauf darstellen zu können; der Verlauf der verhältnismäßig ruhigen Grundbewegung müßte sich daneben von selbst, jedenfalls ohne weitere Annahmen, wie sie die vorgenannten Theorien brauchen, ergeben. Es ist bekannt, in welcher Weise sich hier, da man ja in erster Linie stationäre oder quasi-stationäre Zustände untersuchen will, das ursprüngliche Anfangswertproblem der Integration in ein Randwertproblem verwandelt, dessen mathematische Behandlung äußerst schwierig ist, dessen Erledigung noch in weiter Ferne zu liegen scheint . . . Zwei Zugänge hat man zunächst zu bahnen versucht. Lord *Kelvin*, dann Lord *Rayleigh* und zuletzt *Sommerfeld* haben die Methode der kleinen Schwingungen herangezogen, das Ergebnis war, wie man weiß, ein negatives. Und *Prandtl* meinte, wenigstens in dem Randgebiet der turbulenten Bewegung in der Nähe der begrenzenden festen Körper, der sog. „Grenzschicht“, in der die Geschwindigkeit der Grundbewegung fast unvermittelt auf Null herabfällt, die Verhältnisse mit den klassischen Differentialgleichungen der zähen Flüssigkeit beherrschen zu können; aber auch hier zeigte sich, daß man quantitative Übereinstimmung nicht erhält, ohne zu Annahmen zu greifen, wie sie das Wesen der beiden angeführten, phänomenologischen Theorien ausmachen. Es steht heute so, und die noch nicht abgeschlossenen Arbeiten *Oseens* dürften daran kaum etwas ändern: Die kleinen, mit freiem Auge beobachtbaren, außerordentlich wechselvollen, unregelmäßig schwankenden, fast zitternden Bewegungen der Einzelteilchen einer im Ganzen ruhig strömenden Flüssigkeit *entziehen sich der Verfolgung und Darstellung im Sinne der klassischen Mechanik*. Sie weisen gebieterisch hin auf eine ganz andere, in den letzten Jahrzehnten auf vielen Gebieten der Physik immer mehr zur Geltung kommende Betrachtungsweise: auf die sog. physikalische oder, wie wir hier sagen wollen, die *mechanische Statistik*.

Ich muß, ehe ich zu einer genaueren Umgrenzung dieses Begriffes komme, kurz einen Punkt berühren, der mich selbst lange Zeit gehindert hat, die allgemeine Bedeutung der hier vorliegenden Verhältnisse zu erkennen. Es sieht so aus, als würde es sich bei der eben beschriebenen Erscheinung der Turbulenz um einen ganz vereinzelt dastehenden Fall innerhalb oder im Gegensatz zu der ganzen übrigen Mechanik handeln. Man denkt unwillkürlich an die vortreffliche Übereinstimmung der *Elastizitätstheorie* mit dem wirklichen Verhalten der meisten festen Körper. Und gewiß sind an den Leistungen dieser Theorie die Forderungen erwachsen, die man an die Lehre von den Flüssigkeiten stellt, ohne sie dort befriedigt zu finden. Aber, wenn man näher zusieht, erkennt man, daß die Dinge hier gar nicht so sehr anders liegen. Denn die wirklichen Körper verhalten sich doch nur in gewissen Grenzen elastisch, bis zu bestimmten, ihnen eigentümlichen Höchstspannungen — darin liegt eine, wenn auch unvollkommene Analogie zu jener vielgesuchten, noch wenig aufgeklärten kritischen Grenze, bei der die laminare Flüssigkeitsbewegung in die turbulente umschlägt. Das Wesentliche aber scheint mir dies zu sein: Ist die sog. Elastizitätsgrenze beim festen Körper überschritten, tritt der sog.

[2]) Vgl. meinen Vortrag auf der Naturforscherversammlung in Köln 1908, Jahresber. d. deutsch. Mathemat.-Ver. *17*, 1908, S. 319—320, oder Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen 1909; ferner Elemente der techn. Hydromechanik, *I*, Leipzig 1914, S. 29—33.

Fließzustand ein, den wir mit einem von *Saint-Venant* begründeten Gleichungsansatz noch einigermaßen zu beherrschen glauben, da zeigt sich doch dem Beobachter, daß innerhalb der zahllosen, endlich ausgedehnten und unter dem Mikroskop deutlich erkennbaren Kristalle oder Kristallite des Körpers Lagen- und Richtungsänderungen vor sich gehen, die *nicht anders als statistisch* zu erfassen sind. Die Saint-Venantsche Plastizitätstheorie spielt also hier eigentlich nur die Rolle der beiden früher genannten phänomenologischen Theorien für die *Grund*bewegung einer turbulenten Strömung. Und diese Kristallite sind nicht etwa hypothetische Atome oder Moleküle oder gar nur die Bausteine von solchen, wie die moderne Physik sie gerne und erfolgreich handhabt, sondern durchaus sichtbare Körper mit durchwegs endlichen, bestimmbaren Massen. Kein Mensch denkt daran, daß sich die Bewegungen dieser Kristalle beim Fließen des festen Körpers eindeutig nach den Gesetzen der Mechanik, etwa aus Randbedingungen und Anfangszustand bestimmen lassen. Und was ist es schließlich anderes mit der vieldurchforschten, seit bald hundert Jahren bekannten Brownschen Bewegung? Wir haben uns längst damit abgefunden, bei dieser offenkundig mechanischen Erscheinung die Forderung des eindeutig kausal bestimmten Geschehens fallen zu lassen und uns mit einer Theorie zufrieden gegeben, bei der die Gesetze der klassischen Mechanik zwar nicht völlig ausgeschaltet, aber doch zu einer sehr bescheidenen Rolle von beschränkter Tragweite verurteilt erscheinen. In der Tat steht es also so, daß nicht mehr die Frage, ob überhaupt statistische Betrachtungsweisen zur Erklärung grobsinnlich wahrnehmbarer Bewegungen heranzuziehen seien, erörtert werden muß, sondern das weit schwierigere Problem eröffnet sich: Wo ist die Grenze zwischen den Geltungsbereichen der beiden Anschauungsweisen und in welchem Verhältnis stehen die Voraussetzungen und die Ableitungen der mechanischen Statistik zu den Grundlagen, Sätzen und Ergebnissen der Newton-Euler-Lagrange-Cauchyschen Mechanik?

3. Die mechanische Statistik. Es ist außerordentlich schwierig, über diesen Punkt etwas Hinreichendes und zugleich Verständliches zu sagen. Denn leider ist die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie in den letzten Jahrzehnten sehr vernachlässigt oder zumindest auf höchst abwegige Bahnen gelenkt worden. Man ist, teilweise unter dem Einflusse *Poincarés,* der in seinem schönen Buche, dem berühmten „cours de probabilité" eine Fülle hübscher Aufgaben in geistreicher Weise behandelte, allmählich dahin gelangt, die Wahrscheinlichkeitsrechnung beinahe in das Gebiet der „Mathematischen Unterhaltungen und Spiele" zu verweisen, und hat ganz das Gefühl dafür verloren, daß es sich hier um eine ernsthafte naturwissenschaftliche Theorie für eine bestimmte Klasse beobachtbarer Erscheinungen handelt. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist ein *Teil der theoretischen Physik,* ebenso wie die klassische Mechanik oder die Optik, sie ist eine völlig in sich geschlossene Theorie gewisser Phänomene, der sog. Massenerscheinungen, gleichgültig ob diese nun mechanischer, elektrischer oder anderer Natur sind; sie arbeitet, genau wie jede andere physikalische Theorie, mit bestimmten Voraussetzungen, die sich in klar formulierbare, die Grundbegriffe definierende Axiome zusammenfassen lassen, und leitet aus diesen deduktiv ihre Schlüsse ab. Zwei entscheidende Grundtatsachen muß ich hier hervorheben: Erstens, die Wahrscheinlichkeitsrechnung vermag ihre Resultate immer nur *aus gegebenen Wahrscheinlichkeiten* zu errechnen, so wie etwa die Mechanik nur aus gegebenen Anfangsgeschwindigkeiten die späteren Geschwindigkeiten eines Körpers bestimmt; diese Ausgangswerte der Rechnung erscheinen in der Regel, aber nicht immer, in der Form von Annahmen über sog. „gleichmögliche Fälle". Zweitens, die Wahrscheinlichkeitstheorie kann aus den Daten, die ihr in einem konkreten Falle geboten werden, *niemals etwas anderes als Wahrscheinlichkeiten* ableiten, also Grenzwerte von relativen Häufigkeiten innerhalb unbegrenzt gedachter Folgen von Vorgängen oder Erscheinungen; insbesondere führt sie niemals zu einer *bestimmten* Aussage über den zeitlichen Ablauf eines Einzelvorganges und kann so niemals in unmittelbare Konkurrenz treten mit einem Ergebnis der Mechanik oder der übrigen deterministischen Physik. Ihre Rechtfertigung erhält die Wahrscheinlichkeitsrechnung durch die Übereinstimmung ihrer Folgerungen mit der Erfahrung, eine Übereinstimmung, die in allen bisher durchgeführten Fällen mindestens so gut ist wie die irgendeiner sonstigen physikalischen Theorie.

Es fragt sich nun, in welcher Weise diese Grundsätze einer rationellen statistischen Theorie auf mechanische Vorgänge anzuwenden sind. Ich will dabei ausdrücklich betonen, daß ich nicht an hypothetische Moleküle, Elektronen, α-Teilchen oder dgl. denke, sondern nur Bewegungs- und Gleichgewichtserscheinungen an sinnlich wahrnehmbaren Massen im Auge habe. Wir können uns die Verhältnisse an einem bekannten Beispiel aus der Mechanik der starren Körper veranschaulichen. Das sog. Galtonsche Brett besteht aus einem durch Nägel gebildeten, regelmäßigen Gitter, in dem Kugeln, oder besser kreisrunde Scheibchen, deren Größe gerade dem Nägelabstand entspricht, herabfallen. Läßt man alle Scheibchen aus *einer* Zelle der obersten Reihe fallen, so kommen sie bekanntlich in der letzten Reihe in einer Verteilung an, die mehr oder weniger genau dem Gaußschen Fehlergesetz entspricht. Dieses Ergebnis läßt sich aus den Sätzen der klassischen Mechanik in keiner Weise folgern, ja es fehlt uns jede Vorstellung davon, wie eine solche Ableitung aussehen könnte. Man kann vom Standpunkt der Mechanik nur zweierlei versuchen: Entweder man idealisiert die Aufgabe so weit, daß man alle Abstände als völlig exakt, alle Scheibchen als ideal kreisförmig ansieht usf., dann erhält man überhaupt gar keine Auskunft darüber, wie ein solcher Körper sich bewegt, jeder der geometrisch möglichen Wege liefert auch eine Lösung der Differentialgleichungen. Oder man sucht seinen Trost darin, daß beim Einschlagen der Nägel, bei Herstellung der einzelnen Scheibchen, bei ihrer Einführung in die Ausgangszelle usw. Unregelmäßigkeiten vorkommen und daß diese, zusammen mit äußeren Störungen, wie Luftbewegungen oder dgl. die Bahnen eindeutig bestimmen. Der Trost ist ein nur schwacher, denn praktisch bleiben die Bahnen nach wie vor unbestimmt, da es kein Mittel gibt, die einflußnehmenden Elemente zu bestimmen. Es ist ganz gleichgültig, ob wir an der Annahme festhalten, die Bahnen *wären* bestimmt, wenn wir die genauen Anfangsbedingungen und alle Einflüsse kennten; denn da wir keine Aussicht haben, die Kenntnis je zu erlangen, so ist es eine Annahme, von der sich nie entscheiden läßt, ob sie richtig ist oder nicht, also eine nicht wissenschaftliche. Das allein Wesentliche ist: Die Methoden der klassischen Mechanik versagen dem Problem gegenüber vollständig, die der Wahrscheinlichkeitsrechnung liefern hingegen ein ganz klares, mit der Erfahrung übereinstimmendes Resultat. Dieses hat nicht etwa die Form einer Aussage der Mechanik oder überhaupt der deterministischen Physik, d. h. es legt nicht den Ablauf der Erscheinung eindeutig fest, sondern lautet nur: Ist die Zahl der Einzelkörper und die Zahl der Nägelreihen hinreichend groß, so ist *in der übergroßen Mehrheit der Fälle* eine Verteilung nach dem Gaußschen Gesetz zu erwarten. Dies Resultat gewinnt man natürlich nur auf Grund bestimmter Annahmen über die Ausgangswahrscheinlichkeiten, Annahmen, die, wie schon erwähnt, in der statistischen Theorie dieselbe Rolle spielen wie die „willkürlichen" Kraftgesetze oder die Anfangsbedingungen der Newtonschen Mechanik. Es sei nur nebenbei bemerkt, daß man im Falle des Galtonschen Brettes keineswegs einer so engen Voraussetzung bedarf, wie der in elementaren Ableitungen zugrunde gelegten, es bestände jedesmal die Wahrscheinlichkeit ½ für das Ausweichen nach der einen oder andern Seite — diese Voraussetzung ist in der Regel gar nicht erfüllt.

Nach diesem Schema des Galtonschen Brettes habe ich zunächst eine vollständige Theorie der Brownschen Bewegung durchgeführt[3]). Sie gelangt zu Ergebnissen, die allerdings nicht identisch sind, aber leicht in Einklang gebracht werden können mit den Ergebnissen der älteren Theorien von *v. Smoluchowski* und *Einstein*. Der Unterschied besteht hauptsächlich darin, daß bei mir ausdrücklich ganz bestimmte, explicit ausgesprochene Annahmen über Ausgangswahrscheinlichkeiten an die Spitze gestellt werden — Annahmen, die, wie gesagt, die Rolle der Kraftgesetze in den Problemen der gewöhnlichen Mechanik spielen —, daß ferner in keiner Weise, auch nicht versteckt, von der berüchtigten Ergodenhypothese Gebrauch gemacht wird, und daß endlich die Schlußsätze eine Form annehmen, in der sie nicht als deterministische Aussagen in der Art der klassischen Physik erscheinen. Darin lag ja, wie *Einstein* hervorgehoben hat, ein unerträglicher Widerspruch der früheren Theorie, daß man den Ablauf der Erscheinungen einmal durch physikalische oder mechanische Gesetze als eindeutig bestimmt ansah, dann aber von ganz anderer Seite her zu Aussagen über diesen Ablauf gelangen zu können meinte. Besonders offen tritt dieser Widerspruch in der Boltzmannschen Fassung der Gastheorie zutage (die allerdings mit den hypothetischen Molekülen und nicht mit beobachtbaren Massen zu tun hat, hier also nur als Analogie herangezogen werden kann), wo man zuerst die Geschwindigkeitsänderungen nach den Gesetzen des elastischen Stoßes berechnet und dann durch Überlegungen rein statistischer Art diese Rechnungen durchkreuzt.

Ich will nun auf Einzelheiten nicht weiter eingehen und auch nicht auf die Frage zurückkommen, in welcher Weise in den früher erwähnten Problemen der Turbulenz und des Fließens fester Stoffe die statistische Theorie aufzubauen wäre. Was ich mit meinen bisherigen Veröffentlichungen[4]) angestrebt habe, war nur, die begrifflichen Schwierigkeiten aus dem Wege zu räumen und ein logisch mögliches Schema mechanischer Statistik anzugeben. Gewiß erheben sich noch große und mannigfaltige Schwierigkeiten anderer Art und vor allem werden uns, davon bin ich überzeugt, gewisse Enttäuschungen nicht erspart bleiben: Viele Fragen, die uns heute ganz natürlich und selbstverständlich zu sein scheinen, werden sich als endgültig unbeantwortbar herausstellen, so etwa wie seinerzeit die Newtonsche Himmelsmechanik die Frage *Keplers* nach der Größe der Radien der Planetenbahnen nicht beantwortet, sondern aus der wissenschaftlichen Betrachtung ausgeschaltet hat. Aber wie dem auch sei, mag der Verzicht groß oder klein sein, uns schwer oder leicht fallen, es schien mir unausweichlich, einmal offen und klar auszusprechen, daß es innerhalb der rein empirischen Mechanik Bewegungs- und Gleichgewichtsvorgänge gibt, die sich einer Erklärung auf Grund der *mechanischen Differentialgleichungen* auf die Dauer entziehen und den Aufbau einer geschlossenen Theorie der *mechanischen Statistik* verlangen.

[3]) Physikalische Zeitschrift *21*, 1920, S. 225 bis 232 und 256 bis 262.

[4]) Vgl. insbesondere die oben angeführte Arbeit in der Physik. Zeitschr.; ferner: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Zeitschr. *5*, 1919, S. 52 bis 99 und eine leicht verständliche Darstellung in: Die Naturwissenschaften 7, 1919, S. 168 bis 175, 186 bis 192 und 205 bis 209.

Robert Musil
Gesammelte Werke
Herausgegeben von Adolf Frisé

I
Der Mann
ohne Eigenschaften
Roman

II
Prosa und Stücke
Kleine Prosa, Aphorismen
Autobiographisches
Essays und Reden
Kritik

Rowohlt

Robert Musil
Gesammelte Werke

Prosa und Stücke
Kleine Prosa, Aphorismen
Autobiographisches
Essays und Reden
Kritik

Rowohlt

Umschlag- und Einbandentwurf Werner Rebhuhn

1. Auflage Mai 1978

Gesamtherstellung Clausen & Bosse, Leck/Schleswig
Printed in Germany
ISBN 3 498 04256 4

und böse brauchen. Gut und Böse, Pflicht oder Pflichtverletzung sind Formen, in denen das Individuum ein Gefühlsgleichgewicht zwischen sich und der Welt herstellt. Das Wichtige ist aber, nicht nur die Typik dieser Formen festzustellen, sondern vielmehr den Druck, der sie schafft, oder die Bedrücktheit, auf der sie ruhen, zu erfassen, die unendlich verschieden sind. Die Tat ist eine Stammelsprache dafür, ob es sich um einen Helden, einen Heiligen oder einen Verbrecher handelt. Noch der Lustmörder ist in irgendeinem Winkel voll innerer Verletztheiten und heimlicher Werbungen, irgendwo tut ihm die Welt unrecht wie einem Kind und er hat nicht die Fähigkeit, es anders auszudrücken als so, wie es ihm nun schon einmal gelingt. Es gibt im Verbrecher eine Widerstandslosigkeit und einen Widerstand gegen die Welt und es gibt diese beiden in jedem Menschen, der ein starkes moralisches Schicksal hat. Bevor man einen solchen – und sei er der Schändlichste – vernichtet, sollte man, was Widerstand in ihm war und durch das andere erniedrigt wurde, aufnehmen und bewahren. Und niemand schadet der Moral mehr als jene Gut- und böse-Wichte, die in flauem Entsetzen über die Form einer Erscheinung ihre Berührung ablehnen.

Der mathematische Mensch
[April–Juni 1913]

Eine der vielen Unsinnigkeiten, die aus Unkenntnis ihres Wesens über die Mathematik umlaufen, ist, daß man bedeutende Feldherrn Mathematiker des Schlachtfelds nennt. In Wahrheit darf deren logisches Kalkül nicht über die sichere Einfachheit der vier Spezies hinausreichen, wenn es nicht eine Katastrophe verschulden soll. Die plötzliche Notwendigkeit eines Schlußprozesses, der auch nur so mäßig umständlich und uneinsichtig wäre wie das Auflösen einer einfachen Differentialgleichung, würde inzwischen Tausende hilflos ihrem Tod überlassen.

Das spricht nicht gegen das Feldherrningenium, wohl aber für die eigentümliche Natur der Mathematik. Man sagt, sie sei eine äußerste Ökonomie des Denkens, und das ist auch richtig. Aber das Denken selbst ist eine weitläufige und unsichere Sache. Es ist – mag es auch als einfache biologische Sparsamkeit begonnen haben – längst eine komplizierte Leidenschaft des Sparens geworden, der es auf Verschleppungen des Nutzens so wenig ankommt wie dem Geizhals auf seine bis zum Widerspruch wollüstig hingezögerte Armut.

Einen Prozeß, mit dem man überhaupt nie fertig werden könnte, wie das Zusammenzählen einer unendlichen Reihe, ermöglicht die

Mathematik unter günstigen Umständen in wenigen Augenblicken zu vollziehen. Bis zu komplizierten Logarithmenrechnungen, ja selbst Integrationen macht sie es überhaupt schon mit der Maschine; die Arbeit des Heutigen beschränkt sich auf das Einstellen der Ziffern seiner Frage und auf das Drehen an einer Kurbel oder ähnliches. Der Amtsdiener einer Lehrkanzel kann damit Probleme aus der Welt schaffen, zu deren Auflösung sein Professor noch vor zweihundert Jahren zu den Herren Newton in London oder Leibniz in Hannover hätte reisen müssen. Und auch in der natürlich tausendmal größeren Zahl der nicht schon maschinell lösbaren Aufgaben kann man die Mathematik eine geistige Idealapparatur nennen, mit dem Zweck und Erfolg, alle überhaupt möglichen Fälle prinzipiell vorzudenken.

Das ist Triumph der geistigen Organisation. Das ist die alte geistige Landstraße mit Wettergefahr und Räuberunsicherheit ersetzt durch Schlafwagenlinien. Das ist erkenntnis-theoretisch betrachtet Ökonomie.

Man hat sich gefragt, wie viele von diesen möglichen Fällen auch wirklich benutzt werden. Man hat bedacht, wie viele Menschenleben, Geld, Schöpfungsstunden, Ehrgeize in der Geschichte dieses ungeheuren Sparsystems verbraucht sind, heute noch investiert werden, allein schon nötig sind, damit man das bisher Erworbene nicht wieder vergißt: und hat versucht das an dem Nutzbrauch zu messen, der davon gemacht wird. Aber auch da erweist sich dieser schwere und gewiß umständliche Apparat noch als ökonomisch, ja streng genommen als vergleichslos. Denn unsere ganze Zivilisation ist durch seine Hilfe entstanden, wir kennen kein anderes Mittel; die Bedürfnisse, denen es dient, werden dadurch völlig befriedigt und seine leerlaufende Abundanz ist von der unkritisierbaren Art einmaliger Tatsachen.

Nur wenn man nicht auf den Nutzen nach außen sieht, sondern in der Mathematik selbst auf das Verhältnis der unbenutzten Teile, bemerkt man das andere und eigentliche Gesicht dieser Wissenschaft. Es ist nicht zweckbedacht, sondern unökonomisch und leidenschaftlich. – Der gewöhnliche Mensch braucht von ihr nicht viel mehr als er in der Elementarschule lernt; der Ingenieur nur so viel, daß er sich in den Formelsammlungen eines technischen Taschenbuches zurechtfindet, was nicht viel ist; selbst der Physiker arbeitet gewöhnlich mit wenig differenzierten mathematischen Mitteln. Brauchen sie es einmal anders, so sind sie zumeist auf sich selbst angewiesen, weil den Mathematiker solche Adaptierungsarbeiten wenig interessieren. So kommt es, daß Spezialisten für manche praktisch wichtigen Teile der Mathematik Nichtmathematiker sind.

Daneben aber liegen unermeßliche Gebiete, die nur für den Mathematiker da sind: ein ungeheures Nervengeflecht hat sich um die Ausgangspunkte einiger weniger Muskeln angesammelt. Irgendwo innen arbeitet der einzelne Mathematiker und seine Fenster gehen nicht nach außen, sondern auf die Nachbarräume. Er ist Spezialist, denn kein Genie ist mehr imstande, das Ganze zu beherrschen. Er glaubt, daß das, was er treibt, irgendwann wohl auch einen praktisch liquidierbaren Nutzen abwerfen wird, aber nicht der spornt ihn; er dient der Wahrheit, das heißt seinem Schicksal und nicht dessen Zweck. Mag der Effekt tausendmal Ökonomie sein, immanent ist das ein Allesdahingeben und Passion.

Die Mathematik ist Tapferkeitsluxus der reinen Ratio, einer der wenigen, die es heute gibt. Auch manche Philologen treiben Dinge, deren Nutzen sie wohl selbst nicht einsehen, und die Briefmarken- oder Krawattensammler noch mehr. Aber das sind harmlose Launen, die sich fern von den ernsten Angelegenheiten unseres Lebens abspielen, während die Mathematik gerade dort einige der amüsantesten und schärfsten Abenteuer der menschlichen Existenz umschließt. Ein kleines Beispiel hierfür sei angefügt: Man kann sagen, daß wir praktisch völlig von den – ihr selbst gleichgültiger gewordenen – Ergebnissen dieser Wissenschaft leben. Wir backen unser Brot, bauen unsre Häuser und treiben unsre Fuhrwerke durch sie. Mit Ausnahme der paar von Hand gefertigten Möbel, Kleider, Schuhe und der Kinder erhalten wir alles unter Einschaltung mathematischer Berechnungen. Dieses ganze Dasein, das um uns läuft, rennt, steht, ist nicht nur für seine Einsehbarkeit von der Mathematik abhängig, sondern ist effektiv durch sie entstanden, ruht in seiner so und so bestimmten Existenz auf ihr. Denn die Pioniere der Mathematik hatten sich von gewissen Grundlagen brauchbare Vorstellungen gemacht, aus denen sich Schlüsse, Rechnungsarten, Resultate ergaben, deren bemächtigten sich die Physiker, um neue Ergebnisse zu erhalten, und endlich kamen die Techniker, nahmen oft bloß die Resultate, setzten neue Rechnungen darauf und es entstanden die Maschinen. Und plötzlich, nachdem alles in schönste Existenz gebracht war, kamen die Mathematiker – jene, die ganz innen herumgrübeln, – darauf, daß etwas in den Grundlagen der ganzen Sache absolut nicht in Ordnung zu bringen sei; tatsächlich, sie sahen zuunterst nach und fanden, daß das ganze Gebäude in der Luft stehe. Aber die Maschinen liefen! Man muß daraufhin annehmen, daß unser Dasein bleicher Spuk ist; wir leben es, aber eigentlich nur auf Grund eines Irrtums, ohne den es nicht entstanden wäre. Es gibt heute keine zweite Möglichkeit so phantastischen Gefühls wie die des Mathematikers.

Diesen intellektuellen Skandal trägt der Mathematiker in vorbildlicher Weise, das heißt mit Zuversicht und Stolz auf die verteufelte Gefährlichkeit seines Verstandes. Ich könnte noch andere Beispiele anreihen, wo etwa die mathematischen Physiker mit einemmal wild darauf aus waren, das Vorhandensein des Raums oder der Zeit zu leugnen. Aber nicht so träumelig von weitem, wie das die Philosophen zuweilen auch tun – was jedermann dann sofort mit ihrem Beruf entschuldigt – sondern mit Gründen, die ganz plötzlich mit der Präsenz eines Automobils vor einem auftauchten und schrecklich glaubwürdig waren. Aber es ist genug, um zu sehen, was für Burschen das sind.

Wir andern haben nach der Aufklärungszeit den Mut sinken lassen. Ein kleines Mißlingen genügte, uns vom Verstand abzubringen, und wir gestatten jedem öden Schwärmer, das Wollen eines d'Alembert oder Diderot eitlen Rationalismus zu schelten. Wir plärren für das Gefühl gegen den Intellekt und vergessen, daß Gefühl ohne diesen – abgesehen von Ausnahmefällen – eine Sache so dick wie ein Mops ist. Wir haben damit unsre Dichtkunst schon so weit ruiniert, daß man nach je zwei hintereinander gelesenen deutschen Romanen ein Integral auflösen muß, um abzumagern.

Man wende nicht ein, daß Mathematiker außerhalb ihres Fachs banale oder blöde Köpfe sind, ja daß sie selbst ihre Logik im Stich läßt. Dort ist es nicht ihre Sache und sie tun auf ihrem Gebiet das, was wir auf unsrem tun sollten. Darin besteht die beträchtliche Lehre und Vorbildlichkeit ihrer Existenz; eine Analogie sind sie für den geistigen Menschen, der kommen wird.

Wenn durch den Spaß, der hier aus ihrem Wesen angerichtet wurde, ein wenig dieser Ernst schaut, mögen die folgenden Schlußsätze nicht als unvermittelt empfunden werden: Man greint, daß unsrer Zeit die Kultur fehle. Das heißt vielerlei, aber im Grunde war Kultur immer eine Einheitlichkeit entweder durch Religion oder durch gesellschaftliche Form oder durch Kunst. Für gesellschaftliche Form sind wir zu viele. Für Religion sind wir auch zu viele, was hier nur ausgesprochen und nicht bewiesen werden soll. Und was die Kunst betrifft: wir sind die erste Zeit, die ihre Dichter nicht lieben kann. Trotzdem sind in dieser Zeit nicht nur geistige Energien aktuell, wie sie noch nie da waren, sondern auch eine Gleichgestimmtheit und Einheitlichkeit des Geistes wie noch nie. Es ist töricht, zu behaupten, daß das alles um ein bloßes Wissen gehe, denn das Ziel ist längst schon das Denken. Mit seinen Ansprüchen auf Tiefe, Kühnheit und Neuheit beschränkt es sich vorläufig noch auf das ausschließlich Rationale und Wissenschaftliche. Aber dieser Verstand frißt um sich und sobald er das Gefühl erfaßt, wird er

Geist. Diesen Schritt zu tun, ist Sache der Dichter. Sie haben für ihn nicht irgendeine Methode zu lernen – Psychologie, um Gotteswillen, oder so – sondern nur Ansprüche. Aber sie stehen ihrer Situation hilflos gegenüber und trösten sich mit Lästerungen. Und wenn die Zeitgenossen ihr Denkniveau auch nicht selbst aufs Menschliche übertragen können, fühlen sie doch, was dort unter ihrem Niveau ist.

Analyse und Synthese
[15. November 1913]

Nachdenkende Menschen sind immer analytisch. Dichter sind analytisch. Denn jedes Gleichnis ist eine ungewollte Analyse. Und man versteht eine Erscheinung, indem man erkennt, wie sie entsteht oder wie sie zusammengesetzt ist, verwandt, verbindbar mit andren ist. Man kann natürlich ebensogut sagen, jedes Gleichnis ist eine Synthese, jedes Verstehen ist eine. Natürlich; es sind zwei Hälften der gleichen Handlung. Trotzdem gibt es heute viele Literaten, die auf die Analyse erbost sind und sich mit der Synthese schmeicheln. Ihr Scheinrecht ist dieses: Bei fortgesetzter Ausübung von Partialanalysen oder -synthesen (das ist bei fortgesetztem Denken) wird schließlich alles mit allem verwandt, aus allem ableitbar, das Geschehen zerfällt in Ähnlichkeiten und schrankenlose Kombinationsmöglichkeiten. Es entspricht das zwar durchaus der Wahrheit (und kommt von der historischen Zufälligkeit, der wir die Art unseres inneren Seins, dessen Gruppierungen durch Werte u. s. w. verdanken), aber wird öde, wenn es als Spiel, ohne starke Leidenschaft und ohne sehr viel Talent gehandhabt wird. Dann zetern die Andern über die «bloße» Analyse, die «bloße» Psychologie (obwohl es sich nirgends um Psychologie handelt, eher um ethische Experimente), die mangelnde Verankerung in Wertgefühlen, den unfruchtbaren Rationalismus (obzwar es sich um gar kein rationales, sondern um ein emotio-rationales und senti-mentales Denken handelt) und dergleichen. – Ihr Irrtum ist, daß sie die der ihren naturgemäß ebenbürtige Talentlosigkeit des Durchschnittsvertreters mit der Sache verwechseln. Sie wissen richtig, daß ein Vertrautsein mit inneren Möglichkeiten noch keine Wirklichkeit ergibt, aber ihr Entsetzen übersieht, daß es zu dieser eines Schrittes vorwärts und nicht rückwärts bedarf. Sie wissen, daß ein Mensch, um suggestives Vorbild zu sein oder ein Kunstwerk zu schaffen, noch andere Eigenschaften braucht als Denken und moralische Phantasie, aber sie vergessen, daß man ihm diese hinzuwünschen und nicht das Denken ihm ausreden muß. Die

Nicolas Rashevsky (1934). "Physico-mathematical aspects of cellular multiplication and development." In *Cold Spring Harbor Symposia on quantitative biology*, II (pp. 188-198). Long Island, New York: Cold Spring Harbor.

PHYSICO-MATHEMATICAL ASPECTS OF CELLULAR MULTIPLICATION AND DEVELOPMENT

N. RASHEVSKY

The refinement and applications of the experimental physical methods to cell physiology has made in the last decade an imposing progress. The micromanipulator, the centrifuge-microscope and other ingenious devices have brought to light and made even quantitatively measureable a number of such properties of the cell, about which in the best case only guesses could have been made before. We know now a great deal about the viscosity of the protoplasm and its changes during different phases of the life of the cell; we know the pH and the rH of the cytoplasm and even in some cases of the nucleus; we know a great deal about the electrical properties of the cell. And yet, in spite of all this progress, our knowledge of the fundamental and ultimate causes of one of the most important phenomena of the life of the cell, namely that of the multiplication, remains as unsatisfactory as it was.

Unless we postulate some factors unknown to the inorganic physical world (and to this a physically minded biologist will resort only in the extreme cases), it is simply a logical necessity, free of any hypothesis, that some physical force or forces must be active within the cell to produce a division of the latter into two or more smaller cells. As to what kind of forces these might be, all the above mentioned experimental progress unfortunately does not give us any indication. Hypotheses have not been lacking to explain various aspects of cell division in terms of known physical forces. But none of them proved satisfactory and all of them were made *ad hoc,* and did not follow logically from some general principle.

If however we entertain the hope of finding a consistent explanation of biological phenomena in terms of physics and chemistry, this explanation must of necessity be of such a nature as the explanation of the various physical phenomena. It must follow logically and mathematically from a set of well defined general principles. The collection of experimental facts gives us a lead for the establishment of the general principles. But the question as to whether a phenomenon or a set of phenomena follow from a certain experimentally established principle is in general beyond the reach of the experiment. Only in some very elementary cases can a direct inference of that nature be made from a set of experiments. In the vast majority of cases the answer to such questions belongs to the domain of deductive science. No experimenting, no matter how careful and exhaustive, could have ever established that the variation of the mass of an electron with its velocity, according to the well known Lorentz formula, *is a consequence* of and follows from, the group of experimentally established facts leading to the principle of relativity of motion. The experimentally established impossibility of observing absolute motion on one hand, and the experimentally established fact of the variation of the mass of an electron according to a certain formula on the other hand, would have constituted two sets of unconnected facts. It required the mathematical analysis by a theoretical physicist to *demonstrate* that the two sets of facts are in reality two different manifestations, two different consequences, of the same general principle.

In view of that said above it is only natural to assume that the lack of our knowledge of the fundamental causes of biological phenomena, in spite of the tremendous amount of valuable facts, is due to the lack of use of deductive mathematical methods in biology. This is being realized more and more every year and these symposia are proof of this realization. But as there are no royal roads in mathematics, we should not expect this application of mathematical methods to biology to produce miracles and to solve with one stroke all our fundamental questions. In theoretical, as in experimental, research a great deal of preliminary work is necessary before final results are reached. Besides, in its future development the theoretical research will have to go hand in hand with the experimental, and ask of the latter information which may not yet be available, and for which the experimental scientist would even not have looked.

In the past seven years the author has attempted to develop a system of physico-mathematical biology, and the results, although yet very scarce, are nevertheless not without interest and promise. In the following we shall discuss those aspects of the research which have a bearing on the problem of cell-division.

The question before us is this: Do we need to assume some special independent mechanisms, which produce at a certain stage of the cellular life a division, or are those mechanisms merely the consequences of more general phenomena, which we *know* occur in all cells? To answer this question we must take some such general phenomenon and investigate its mathematical consequences. If the process of division is found among such consequences, the answer is found. If however a complete systematical study of the consequences of all known general phenomena will not lead us to the phenomenon of division, we either shall have to look for other yet undiscovered general properties of cells, or else postulate the division as a fundamental not further analyzable phenomenon. As we shall see there are no indications of any necessity of going that far.

The complexity of a cell and the almost infinite variety of different kinds of cells would at first glance seem to put unsurmountable difficulties to any mathematical analysis. But actually they make our task of finding and studying the most general properties, common to all cells without exception, easier. For we set out to investigate the consequences of *general* principles. Hence we must discard from our considerations, at least for the beginning, all such properties and phenomena, which are not absolutely common to all cells.

But then, as we have already discussed at length at various other occasions[1], there remain rather few really general properties of cells, and amongst those the most conspicuous is this:

Every cell has the property of taking in some kind of substances from the surrounding medium, to metabolize them and to give off into the surrounding medium some products of its metabolism. At first sight not much can be done with such a general statement. But a careful study proves the contrary.

Consider a physical system, which is liquid, like a cell is, and which takes in some substance from the surrounding medium, in which this substance is dissolved. If inside the system this substance is transformed into other ones, due to any kind of physico-chemical reactions, there will be a difference in concentrations of the substance outside and inside the system, the concentration outside being greater. Furthermore the concentration of the substance will not be uniform either outside or inside of the system, provided the diffusion coefficients for the substance are finite. The actual distribution of the concentrations inside and around the system will depend on the type of reaction, the shape and, in general, the structure of the system. But the non-uniformity of the concentrations will always be there, regardless of any special condition. This is almost obvious, but can be rigorously proven mathematically. In any case we have to do with a phenomenon of diffusion governed for a quasi-stationary state[2] by the equation

$$D\Delta^2 c = q(x, y, z) \qquad (1)$$

where D denotes the coefficient of diffusion, c the concentration, and $q(x, y, z)$ the rate of consumption of the substance, which in general will be a function of coordinates. Outside the system we have in particular $q = 0$. Equ. (1) has no solution $c =$ Const.

Similar considerations hold for a system in which some substance is produced and diffuses outside. Only now there will be always an excess of concentration inside. In any case, however, a metabolizing system, by virtue itself of the metabolism, produces in itself as well as in the surrounding medium gradients of concentrations.

Any dissolved substance produces osmotic pressure, which for dilute solutions is proportional to the concentration, and is in general some function of the concentration. Hence any non-uniformity of concentration causes a non-uniformity of osmotic pressure. And this in its turn produces forces acting on each element of volume according to the equation:

$$f_0 = - \operatorname{grad} p \qquad (2)$$

f_0 being the force, p the pressure.

But this is not the only kind of force which a non-uniformity of concentrations will produce. If a dissolution of a substance is accompanied by liberation of heat, it means that there is a force of attraction between the molecules of the solvent and those of the solute. A non-uniform distribution of the molecules of the latter will result in forces on each element of volume of the solvent, directed towards greater concentrations of the solute. An estimation of these forces shows that they are of the same order of magnitude as the osmotic forces. This estimation can be done in the following way:

Let the force of attraction between a molecule of the solvent and a molecule of the solute be given by K/r^n where K is a constant and r the distance between the two molecules. For brevity

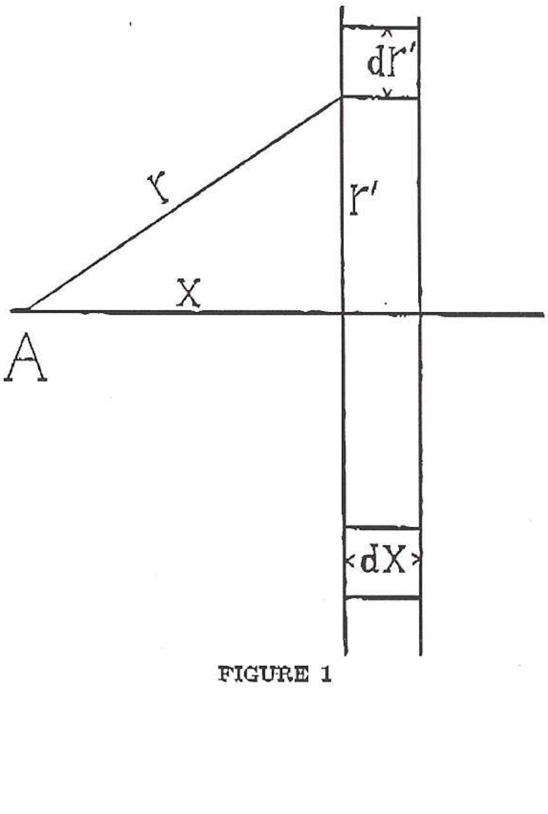


FIGURE 1

PAGE 190 IS MISSING

PAGE 191 IS MISSING

eration of the energy, as long as we consider only that part of it, which is due to the dissolved substance. This result is independent of the particular type of the system considered and holds in general; for the larger the cell the larger the difference in concentrations, and when we divide the cell, the difference in concentrations decreases, and therefore the excess of free energy also decreases.

The division of the cell is however connected with an increase of the surface energy. For the total surface of the two halfs is equal to about 1.25 the surface of the original cell, and therefore the total surface energy, which is equal to the surface tension γ, times the total surface, increases by $0.25 \times 4\pi r_0^2\gamma = \pi r_0^2\gamma$. The inspection of the formulae shows that for small r_0 the increase of the surface energy is larger than the decrease of the volume energy F_v. For large r_0 the reverse holds true. The value of r_0 above which that reversal occurs is found by putting $F_v(r_0) - 2F_v(0.8\, r_0) = \pi r_0^2\gamma$. Substituting equ. (13) into this leads to an equation which cannot be solved algebraically exactly. But two solutions are easily obtained for the two extreme cases: that of a very large h and that of very large D_i and D_e. They are:

$$r_0 = \sqrt[5]{\frac{1890\, D_e^2 D_i^2\, Mc_0\gamma}{2\cdot 4\, RT(2D_e^2 + 28D_iD_e + 35D_i^2)q^2}} \tag{14}$$

and

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{Mh^2c_0\gamma}{0.8\, RTq^2}} \tag{15}$$

Equ. (13) shows, that the excess of free energy is proportional to q^2, and accordingly the critical radius is the smaller, the larger q. Only reactions with a large q contribute essentially to the excess of the free energy of the volume, and in the actual case of a cell, where a great number of reactions are taking place simultaneously, only the fastest have to be considered in the first approximation. Of those the most conspicuous is the respiratory reaction. Taking[4] for q a value of 10^{-4} gr. cm.$^{-3}$ min.$^{-1}$, for c_0 5×10^{-6} gr. cm.$^{-3}$ and for D_i and D_e values of the order of magnitude of 10^{-5} cm.^{2} min.$^{-1}$ in accordance with the experiments of Krogh and $\gamma \sim 1$ dyn. cm.$^{-1}$ [5], we find that r_0 is of the order of magnitude of a few hundredths of a millimeter, that is of the actual size of a cell.

The above results indicate that above a certain critical size, which is of the order of magnitude of the actual cell sizes, the division of a cell will of necessity be accompanied by a liberation of energy, or by a decrease of the free energy of the system. As any system tends to assume such a configuration, for which its free energy has the smallest value possible, one is tempted to infer that therefore division of a cell will occur spontaneously as soon as, in the process of its growth, the cell will exceed the critical size. The process of cell-division would thus be a necessary consequence of the processes of metabolism. The details of the mechanism of division would vary from case to case, but in all cases the fundamental process would be based on the same general principle. This is the conclusion which we made in our earlier studies.

Unfortunately a closer examination of the problem shows that things are not so simple. And this for two reasons: first, a transition of a system from a state of higher free energy to a state of lower one does not necessarily occur spontaneously, in the sense that it may require an initial finite disturbance to start the transition. This will be the case when the intermediate states, through which the system has to pass, will correspond to a higher free energy than the initial state, in other words, when the two minima of free energy are separated by a maximum, forming a threshold. But a still more important point is this: In systems possessing a very simple *structure*, or no structure at all, as in most homogeneous inorganic thermodynamical systems, it is always true, that the system changes spontaneously in the direction of decreasing free energy. But this does not apply to systems possessing certain structures or mechanisms. A simple example is given by a container, divided into two air-tight compartments by a partition, which has a hole closed by a valve, opening only in one direction. If there is excess of air-pressure on that side of the partition into which the valve opens, this excess of pressure will close the valve, and prevent the equalization of pressures, in spite of the fact that such an equalization of pressures would be accompanied by a decrease of free energy. Such valve-actions play very little part, if any, in the domain of the inorganic. But in biological systems, which possess sometimes highly complex structure, they are of importance. As we shall see presently, even such a simple structure as that of a spherical cell is important in this respect.

On the other hand it must be kept in mind, that although a decrease of free energy does not necessarily lead to a spontaneous change in that direction, it is quite impossible that a system would spontaneously change towards a state of greater free energy. Therefore, speaking mathematically, we may say that our investigations thus far have established the *necessary*, but not the *sufficient* conditions of spontaneous division. We see that every cell, by virtue of the processes of metabolism, which are taking place in it, contains in itself the necessary conditions for spontaneous division above a certain size.

To investigate the sufficient conditions for a spontaneous division we must go back to the consideration of the effects of various forces, discussed previously.

An ordinary liquid drop, when not subject to the force of gravity, will not divide spontaneously, because whenever it is deformed in some way from its spherical shape, the capillary pressure increases at points with increased curvature and decreases at points with decreased curvature, so that the ensuing forces tend to restore again the uniform curvature, or in other words the original spherical shape. We say that such a spherical drop is in stable equilibrium. In order that a spherical cell of the nature considered above, could divide really spontaneously, it is necessary that it would become unstable. Any infinitesimal deformation from the spherical shape must produce such forces as will tend to increase this deformation further. The forces in a spherical cell are always in equilibrium, because of its perfect symmetry. But that equilibrium is not necessarily stable.

To investigate the distribution of forces for an infinitesimal deformation, we must investigate the distribution of the concentrations and the deviation of this distribution from a spherical symmetry for an infinitesimal deformation. An attempt to study this for *any* infinitesimal deformation leads to great mathematical difficulties and we shall confine ourselves first to a special kind of deformation in which the spherical cell is deformed into a figure of rotation, the equation of whose meridian section is

$$r = r_0 + \Delta_0 \cos 2\Theta \qquad (16)$$

Δ_0 being an infinitesimal quantity, so that all powers of Δ_0 higher than the first may be neglected.

In such a deformed cell the distribution of concentrations along the surface will not be uniform, as in a spherical cell. As we shall presently see, it is the concentration at the surface that interests us primarily.

Equ. (9) shows that the volume forces, which are due to the non-uniformity of concentrations are derived from a potential

$$\phi = -(\psi \pm \Gamma - RT/M)\,c \qquad (17)$$

in which ψ stands for $4\pi N\lambda/M(n-3)$. At the surface of the cell, bound by a membrane, there is moreover a discontinuity of concentrations, c and c′ having not the same value. The difference $c'-c$ on each side of the membrane equals, as seen from equ. (11), $qr_0/3h$ for a spherical cell. This discontinuity of concentrations produces surface forces, having similar effects as a pressure. First there is a pressure

$$p_0 = (RT/M)(c'-c) \qquad (18)$$

due to the difference of osmotic pressures on both sides of the membrane. Furthermore the same factors that produced the forces f_s and f_r will also produce a pressure on the membrane. We may consider the latter as being of a finite thickness δ and possessing a definite diffusion coefficient D_m. The permeability h is then given by D_m/δ. Inside the membrane we have $dc/dr = (c'-c)/\delta$ and therefore there is a force acting normally to the membrane and equal to $-\psi'(c'-c)/\delta$ per unit volume where ψ' is in general different from ψ, because the chemical nature of the membrane may be in general different from that of the cytoplasm. The minus sign is used, because when $c' > c$ the force is directed outwards, so that the pressure is negative.

Per unit area of the membrane this force is equal to

$$p_s = -\psi'(c'-c) \qquad (19)$$

Similarly we have $p_r = \pm \Gamma'(c'-c)$ where again Γ' is different from Γ.

In order that a mass of liquid should be in equilibrium it is necessary that the sum of the potential, from which the volume forces are derived and of the total pressure should have the same value at all points of the surface. If this is not the case a deformation of the surface will take place. If especially in a drop, deformed according to equ. (16), this sum will be larger at the equator than at the poles, there will be a tangential force along the surface directed from the equator towards the poles, and this will tend to elongate the drop further.

The above sum at the equator is given by*

$$\begin{gathered}-(\psi\pm\Gamma-RT/M)c_e + (RT/M)\,(c'_e-c_e) - \\ \psi'(c'_e-c_e) \pm \Gamma'(c'_e-c_e) = \\ -(\psi \pm \Gamma + \psi' \mp \Gamma')c_e + \\ (-\psi' \pm \Gamma' + RT/M)c'\end{gathered}$$

where c_e and c'_e denote the corresponding values of c and c′ at the surface. At the pole the above sum equals $-(\psi \pm \Gamma + \psi' \mp \Gamma')\,c_p + (-\psi' \pm \Gamma' + RT/M)\,c'_p$. Hence in order that those forces, considered alone, would produce a further elongation of the deformed cell, we must have:

$$\begin{gathered}-(\psi \pm \Gamma + \psi' \mp \Gamma')\,(c_e - c_p) + \\ (-\psi' \pm \Gamma' + RT/M)\,(c'_e - c'_p) > 0\end{gathered} \qquad (20)$$

A rather elaborate calculation, which will be given elsewhere, shows, that in the first approximation we have:

$$\begin{gathered}c_e - c_p = 2qr_0\Delta_0/3D_i \quad ; \\ c'_e - c'_p = 2qr_0\Delta_0/3D_e\end{gathered} \qquad (21)$$

* The italicized c_e, c'_e, c_p, c'_p in this equation and in the following equations and text denote surface values.

Hence,

$$q\,[(-\psi' \pm \Gamma' + RT/M)/D_e - (\psi \pm \Gamma + \psi' \mp \Gamma')/D_i] > 0 \qquad (22)$$

But (22) is a relation between various material constants of the cell, which are determined by the physico-chemical nature of the substances of which the cell is built and which it metabolizes. Whenever (22) is satisfied, the above discussed forces, which in the ultimate analysis are due to the metabolic processes, will tend to divide the cell.

To this tendency the capillary pressure will be however opposed. If it were not for the latter any cell, for which (22) is satisfied, would divide indefinitely into smaller and smaller ones. In order to take into account the capillary forces, we must add to the various pressures discussed above also the capillary pressure, which is equal to the product of the surface tension γ with the mean curvature of the surface.

We then obtain as the necessary condition for a spontaneous division instead of (20) the following:

$$-(\psi \pm \Gamma + \psi' \mp \Gamma')(c_e - c_p) + (-\psi' \pm \Gamma' + RT/M)(c'_e - c'_p) + (P_e - P_p) > 0 \qquad (23)$$

where P denotes the capillary pressure. A calculation, which we also cannot give here, shows, that

$$P_p - P_e = 8\gamma\Delta_0/r_0^2 \qquad (24)$$

Substituting (24) and (21) into (23), we obtain:

$$[-(\psi \pm \Gamma + \psi' \mp \Gamma')/3D_i + (-\psi' \pm \Gamma' + RT/M)/3D_e]\, q r_0 > 4\gamma/r_0^2 \qquad (25)$$

If (22) is not satisfied, (25) cannot be satisfied for any values of r_0. If however (22) is satisfied, (25) is satisfied for sufficiently large r_0. The value r^* above which (25) becomes in this case satisfied, or in other words, above which the cell becomes unstable, is obtained by equating the two sides of (25). This gives:

$$r^* = \sqrt[3]{\frac{4\gamma}{[-(\psi \pm \Gamma - \psi' \mp \Gamma')/3D_i + (-\psi' \pm \Gamma' + RT/M)/3D_e]\, q}} \qquad (26)$$

We have estimated above the order of magnitude of ψ, ψ', Γ and Γ'. With such plausible values we find for r^* again the order of magnitude of a few hundredths of a mm.

It is interesting to consider as an illustration the case when only osmotic forces are present, so that $\psi = \psi' = \Gamma = \Gamma' = 0$.

In that case (20) reduces to $RT/M\,(c'_e - c'_p) > 0$ or $c'_e > c'_p$ a relation, rather obvious for this case, but which, according to (22) holds only for positive q, that is for the case of a substance produced in the cell. For that case (26) reduces to

$$r^* = \sqrt[3]{12\gamma M D_e/RTq} \qquad (27)$$

In case of a substance diffusing into a cell, no dividing forces are present, in spite of the fact that the division above a certain size is accompanied by a liberation of energy. We have here an analogon to the above discussed valve-action.

It is furthermore interesting, that according to (27), the size, at which the cell becomes unstable, depends only on D_e, that is on the diffusion constant of the outside medium and the size becomes infinite with infinite D_e. If instead of (21) we use more complicated exact expressions, the formula for r^* will involve also D_i. However even in that case also no division occurs for $D_e = \infty$. Equ. (14) shows that even in that case a division is accompanied by a liberation of energy above a finite size. Of course in actual cells there is no reason whatsoever to neglect the other forces as compared with the osmotic ones, and the more complicated equation (26) must really be used.

Calculations which shall be published elsewhere have also been carried out for the case of a cell consisting of two phases—nucleus and cytoplasm. In this case we also obtain similar relations, only the formulae are somewhat more complicated. But an instability occurs above a certain size, which leads to the division of the system. An investigation of still more complex heterogeneous systems is in progress.

The conclusion to which our study thus far leads us, is this: In any cell there are a number of forces, caused ultimately by the fact that the cell metabolizes. Some of those forces tend to divide the cell, some counteract this tendency. Whenever the former ones prevail, a division takes place. Although a certain condition must be satisfied in order that the dividing forces would prevail, this condition is of a very general nature. It is *a priori* equally probable that (22) will or will not be satisfied. So that the very general fact alone of the cellular metabolism would make us expect that in a great number of cases the cell must divide spontaneously. On the other hand, if the necessary conditions are not satisfied, the cell will not grow to an indefinite size, because as its specific surface becomes smaller, the rate of growth, determined by the intake of external substances, will diminish and finally become equal to the rate of decomposition, which takes place in the whole volume of the cell.

The next step in our program will be to investigate more in detail the various constants such as ψ, Γ etc. and derive them from known atomic properties of various cell-substances, such as proteins, lipoids, carbohydrates, inorganic salts. This will lead into the domain of atomic physics, as applied to biology.

Especially the effects of electric charges will have to be considered.

Starting with a rather general simplified picture we thus arrived at a rather complex system of forces, which in its complexity is more likely to resemble actual biological conditions. Thus it should be, if we are on the right track. On the other hand, it shows that all the complexity of biological systems and phenomena may have one rather simple underlying principle.

A few words must still be said about the bearing of those forces on the formation and development of multicellular organisms.

As we have seen, concentration gradients are produced both in the cell and outside of it. From here it follows, that not only will there be forces acting on each element of volume of a cell, but that whole cells will exert forces on each other. The order of magnitude of those forces can readily be estimated by the methods given above. Those forces may be either attracting or repelling, depending again on the specific combination of the physico-chemical constants of the system. A detailed mathematical investigation of this problem is still wanting. However from rather general considerations an interesting conclusion or at least a very probable assumption can be made.

A more detailed examination of the conditions, at which the dividing forces prevail, shows that what happens in that case is this: on the whole there are forces of repulsion between each element of volume of the cell. It is the resultant of those forces of repulsion, that produces the division. In the opposite case, forces of attraction are prevailing. If we have an aggregate of cells, in which such forces of repulsion prevail, the same will hold true not only for each element of volume of each cell, but also for each cell of the aggregate. So that we would expect such cells to repel each other. In other words, actively dividing cells would repel each other. The contrary we would expect to hold for cells, which do not divide. Of such the most conspicuous are the nerve cells. We would expect forces of attraction between them. In a previous paper[6] we arrived at the same conclusion by thermodynamical reasoning and considerations of free energy changes. But as we have now seen, such considerations are not always valid in structured biological systems. It is however very remarkable that the same conclusion is reached by quite a different line of argument.

We have shown previously that the assumption of forces of that kind leads to an understanding in a general way of some features of embryonic development, such as the formation of the blastula, gastrulation and formation of the neural tube. Should further studies bring out other correlations between the theoretically anticipated effects and the actually observed ones, it it is not impossible that the problem of form of higher organisms, as well as problems of ontogeny, will turn out to be different aspects of the general principles underlying the physical chemistry of the cell.

LITERATURE

1) Rashevsky, N.: Philosophy of Science, 1, 176, 1934.
2) Rashevsky, N.: Protoplasma, 14, 99, 1931; Physics, 1, 143, 1932.
3) Gyemant, A.: Grundzüge der Kolloidphysik. Vieweg, 1925.
4) Rashevsky, N.: Protoplasma, 16, 387, 1932.
5) Harvey, E. Newton,: Biol. Bull. 60, 67, 1931.
6) Rashevsky, N.: Protoplasma, 20, 180, 1933.

DISCUSSION

Dr. Borodin: What is the nearest example in nature to this theoretical case? Would that be a liquid crystal, artificial cell of Crile, or bacterium?

Dr. Rashevsky: This is difficult to answer. Liquid crystals are ruled out principally because they do not grow by intususception. Growth by intususception, that is, the occurrence of the corresponding physicochemical reactions in the whole volume of the system, and not only at the surface, is essential for our theoretical considerations to hold. Moreover, liquid crystals are anisotropic. A mathematical treatment of anisotropic systems would be very interesting, though much more difficult. For in that case the diffusion coefficients will no more be scalar quantities, but will be tensors. I believe that some bacteria, namely cocci, will come closer to our idealized picture. As regards Crile's autosynthetic cells, they may perhaps represent the closest approach, but too little is known about them yet to enable us to state a definite opinion.

Dr. Rahn: What is the effect of the cell wall around the cell? Wouldn't that interfere with these forces to a considerable extent?

Dr. Rashevsky: The forces due to the presence of a cell-wall are included in our considerations and represented by the quantities Γ' and Ψ'. A detailed inspection of our formulæ, on which I can not dwell here, shows that if the cell membrane has a rather high rate of oxygen consumption, the forces originated in it will tend to inhibit the division. A perfectly inert membrane, which does not participate at all in the metabolism of the cell, will be the seat of only osmotic forces, because $\Psi' = \Gamma' = 0$ in that case. Those osmotic forces will tend to divide the cell, when produced by substances diffusing into the cell, and will tend to inhibit division in the opposite case.

Dr. Rahn: Certain organisms, after being irradiated with ultraviolet light, continue to grow without cell division. Bacteria irradiated with ultraviolet will produce very long threads without cell division; I believe it was Gates who published these results. Also, in rapidly growing plant tissues, the nuclei may divide so rapidly at times that cell division can not follow, at least no cell walls became visible until three or four mitoses have followed each other.

Dr. Rashevsky: Those phenomena can be accounted for without difficulty. The phenomenon of division of a cell is only a particular case of the more general phenomenon of spontaneous increase of the surface. The latter may occur without division taking place, merely by elongation. I have considered such possibilities in several of my publications. I have also shown that, due to the presence of various forces, discussed in the paper, liquid systems may possess non-spherical, elongated shapes of equilibria. But those shapes are possible only as long as some reactions go on in the system. Otherwise a liquid system must be spherical. This throws light on the understanding of the rounding up after death of some non-spherical protozoa (*Euglena*).

Dr. Longsworth: I have been very much interested in the approach to the problem of the dynamics of cell division which Dr. Rashevsky has made, and I feel that, qualitatively, the mechanism which has been postulated is a most promising one. There are certain features of the theory however, concerning which I should like to make the following comments. If I have correctly understood the model which has been proposed, equation (11) for example, implies that the concentration distribution within the liquid interior of the cell has spherical symmetry, the concentration being a maximum at the center where $r = O$ and decreasing monotonely to its value at $r = r_0$. In general, however, a concentration gradient also involves a density gradient, so that the density of the solution at the center would be different from that near the periphery of the cell. Since a single liquid phase can not support a distribution of densities in which a heavier solution is above a lighter one, it follows that the solutions in the various portions of the cell will fall, or rise, depending upon their relative densities, until the concentrations are redistributed in such a manner that the heavier solution is always on the bottom. The convection in the cell due to these gravity currents, and also convection due to heat, will certainly destroy the spherical symmetry of the concentration gradient, upon which the computed energy effects are based.

Dr. Rashevsky: I am perfectly aware of the presence of those other factors, which you mention. As I explicitly stated in several publications, I am choosing the case of spherical symmetry only as the mathematically simplest case, with which to begin. In the further development of the theory, gravitational and other disturbing effects will have to be taken into account. I believe that those effects will be of special importance in the theory of the segmentation of eggs, as determining the position of the first cleavage plane.

Dr. Longsworth: I have also had difficulty in reconciling the properties of "q" with the known characteristics of diffusion and reaction velocities. "q", the rate of formation of a substance within the cell per unit volume, has been taken as constant. Does not the assumed constancy of "q" imply a rather unusual synchronization of the diffusion into the cell of the substrate with the velocity of the chemical reaction wherein the substrate is converted into the substance, or substances, which are subsequently to diffuse outward? Whereas, the inward diffusion of substrate follows a particular course, the subsequent reaction involving the substrate may be any one of several orders and it seems to me that, in general, "q" will be a rather complicated function of the concentration and may vary from point to point within the cell.

Dr. Rashevsky: All that I also quite well realize. I studied the case of a constant q as the simplest one. Work not yet published shows, however, that in more complex cases the results are not changed materially; only the final formulae become more complicated.

Dr. Longsworth: I realize that the foregoing objections do not invalidate the qualitative conclusion that a dividing cell liberates energy, but would not these objections throw doubt upon the validity of the mathematical equations?

Of course, many living cells are approximately spherical in shape. Let us consider, however, another great class of cells, those which are approximately cylindrical. In order to render the argument somewhat more precise let us pass to a rather extreme case in which the length of the cell is very large in comparison with its radius and in which cell growth is by increase in length while the radius remains constant. *Bacillus megatherium* is a fair example of such a cell. In this case there is essentially no change in the difference $c - c_0$ on cell division, and consequently no decrease in free energy. Also, since the surface varies directly as the volume, there will be no surface energy involved in cell division, and this consequently represents, in terms of the theory, an indeterminate case.

Dr. Rashevsky: In most cases of division of cylindrical cells the primary thing to divide is the nucleus, which is approximately spherical. The cell itself divides as a result of that. Such cases I have considered and they do not offer any particular difficulties., Cases of bacilli are, however, different, and at present the theory is apparently not yet sufficiently developed to include those cases also.

Dr. Longsworth: The next question that I would like to raise is not yet very clearly formulated in my own mind. Assuming that values for $\Delta F_v(V_0)$ and $2\Delta F_v(V_1)$ have been correctly computed, what fraction of the difference, δF_v, is actually available for compensating the increase in surface energy on cell division? For the entire amount δF_v to be available for this purpose, is it not necessary that the process of cell division be completely reversible at every stage? Actually, cell division involves processes which almost certainly are not reversible and would not the entropy changes accompanying these irreversible processes seriously restrict the energy available for increasing the total surface?

Dr. Rashevsky: What you mention now brings up another reason to be careful with the use of thermodynamical arguments in such complex, structured systems. I have myself abandoned the thermodynamical method for the more complicated, but rigorous, kinetic one. The latter shows, as you have seen, that under certain conditions a spontaneous division will occur.

Dr. Cole: It might be expected that the effect of the gravitational field would be quite small during the periods when the cell protoplasm shows an elasticity or at least a high viscosity. In an agar gel these characteristics are quite effective in preventing convection but do not interfere markedly with ionic and molecular diffusion. In a less viscous protoplasm, the explanation of vertical cleavage planes and protoplasmic streaming would be very interesting.

In addition to the chemical processes already mentioned, it may be necessary to consider the mechanical surface force more carefully. Although it may be due to a capillary surface tension, as has been assumed here, there are some indications that it may be considered as due to an elastic membrane. In this case the tangential surface force per unit length would depend upon the surface area of the cell. Although the assumption of an elastic membrane may be more reasonable, I fully realize that it would add to the mathematical difficulties; and I do not see any reason to believe that it might invalidate the general conclusions given by the simpler assumption.

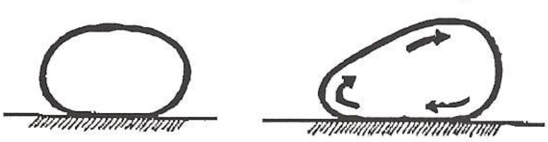
No mention has been made of any electrical effects in the cell model, but I would be interested in knowing how large the electrical energy of some living cell might be in comparison with the factors which have been considered.

In an earlier lecture, the differences between the growth of crystals and cells were brought up. It is interesting to see that from the osmotic considerations, cell division depends upon the presence of an outward diffusion. The absence of such a process might be given as a reason for the comparatively unlimited growth of crystals without division.

Dr. Rashevsky: I have considered also the influence of an elastic membrane of a cell, though I have not yet any results for publication. As regards the electric charge, I am investigating at present its influence, but I am not yet prepared to make any definite statement.

Dr. Cole: In a discussion of the methods of attack on a problem of this type, the stability of an electrified droplet may be mentioned. The radius calculated by the energy-balance method is of the same order of magnitude as the radius found by Rayleigh to be stable for a perturbation of the drop.

Dr. Rashevsky: Speaking of possible streamings due to inhomogeneities in the cell, I would like to bring to your attention one case which may have significance in the theory of mobility of some cells. Consider a drop resting on a solid plane (Fig. 2a). If no reactions take place in



2a 2b

it, it will assume the shape as indicated in the figure, under the influence of gravity and of capillary forces only. This shape will be that of a stable equilibrium. If, however, reactions are taking place in such a drop, other forces, as we have seen, will also be present, and the symmetrical shape of equilibrium, as shown in fig. 2a, may not be a stable one. If the drop is deformed so as to assume the shape shown in fig. 2 b, then at the left end the concentration of the diffusing-in substances will be greater. This may result in an increase of the reaction rate, and, therefore, of the heat liberated by the reaction. All this may produce convection currents, as shown by arrows in fig. 2b. Such currents will not tend to restore the original symmetric shape, but will produce a movement of the drop on the solid plane from left to right. The analogy with the locomotion of some amoebae is apparent. Unfortunately the mathematical treatment of this problem presents very great difficulties.

Dr. Davenport: I think the biologist might find that whereas the explanation of the division of the spherical cell is very satisfactory, yet it doesn't help as a general solution because a spherical cell isn't the commonest form of cell.

The biologist knows all the possible conditions of cell form before division; cases where the cells increase enormously without dividing, and divide without increasing in size. There doesn't seem to be in any general way a relationship between the form or size in connection with the cell division. In the special cases of egg cells and cleavage spheres, this analysis may prove very valuable. But after all, these are only special cases.

Dr. Rashevsky: I have insisted on several occasions that the results presented today are only the first steps in the development of mathematical biology. It would mean a misunderstanding of the spirit and methods of mathematical sciences should we attempt to investigate more complex cases without a preliminary study of the simpler ones. The generalization of the theory, to include non-spherical cells, is indeed needed, and this will be the subject of research after the simpler cases are thoroughly and exhaustively studied. A few preliminary investigations of simplest non-spherical cases show that qualitatively the results presented today remain unchanged. To my mind it is already quite a progress, that a general physico-mathematical approach to the fundamental phenomena of cellular growth and division, as well as development of multicellular organisms, has been shown to be possible. Judging by the development of other mathematical sciences, I would say that it will take at least twenty-five years of work by scores of mathematicians to bring mathematical biology to a stage of development comparable to that of mathematical physics.

A Model of General Economic Equilibrium[1]

The subject of this paper is the solution of a typical economic equation system. The system has the following properties :

(1) Goods are produced not only from " natural factors of production," but in the first place from each other. These processes of production may be circular, i.e. good G_1 is produced with the aid of good G_2, and G_2 with the aid of G_1.

(2) There may be more technically possible processes of production than goods and for this reason " counting of equations " is of no avail. The problem is rather to establish which processes will actually be used and which not (being " unprofitable").

In order to be able to discuss (1), (2) quite freely we shall idealise other elements of the situation (see paragraphs 1 and 2). Most of these idealisations are irrelevant, but this question will not be discussed here.

The way in which our questions are put leads of necessity to a system of inequalities (3)—(8′) in paragraph 3 the possibility of a solution of which is not evident, i.e. *it cannot be proved by any qualitative argument.* The mathematical proof is possible only by means of a generalisation of Brouwer's Fix-Point Theorem, i.e. by the use of very fundamental *topological* facts. This generalised fix-point theorem (the " lemma " of paragraph 7) is also interesting in itself.

The connection with topology may be very surprising at first, but the author thinks that it is natural in problems of this kind. The immediate reason for this is the occurrence of a certain " minimum-maximum " problem, familiar from the calculus of variations. In our present question, the minimum-maximum problem has been formulated in paragraph 5. It is closely related to another problem occurring in the theory of games (see footnote 1 in paragraph 6).

A direct interpretation of the function $\phi(X, Y)$ would be highly desirable. Its rôle appears to be similar to that of thermodynamic potentials in phenomenological thermodynamics ; it can be surmised that the similarity will persist in its full phenomenological generality (independently of our restrictive idealisations).

Another feature of our theory, so far without interpretation, is the remarkable duality (symmetry) of the monetary variables (prices y_j, interest factor β) and the technical variables (intensities of production x_i, coefficient of expansion of the economy α). This is brought out very clearly in paragraph 3 (3)—(8′) as well as in the minimum-maximum formulation of paragraph 5 (7**)—(8**).

Lastly, attention is drawn to the results of paragraph 11 from which follows, among other things, that the normal price mechanism brings about—if our assumptions are valid—the technically most efficient intensities of production. This seems not unreasonable since we have eliminated all monetary complications.

The present paper was read for the first time in the winter of 1932 at the mathematical seminar of Princeton University. The reason for its publication was an invitation from Mr. K. Menger, to whom the author wishes to express his thanks.

1. Consider the following problem : there are n goods $G_1, \ldots, G_n$ which can be produced by m processes $P_1, \ldots, P_m$. Which processes will be used (as " profitable ") and what prices of the goods will obtain ? The problem is evidently

[1] This paper was first published in German, under the title *Über ein Ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes* in the volume entitled *Ergebuisse eines Mathematischen Seminars*, edited by K. Menger (Vienna, 1938). It was translated into English by G. Morgenstern. A commentary note on this article, by D. G. Champernowne, is printed below.

non-trivial since either of its parts can be answered only after the other one has been answered, i.e. its solution is implicit. We observe in particular:

(*a*) Since it is possible that $m > n$ it cannot be solved through the usual counting of equations.

In order to avoid further complications we assume:

(*b*) That there are constant returns (to scale);

(*c*) That the natural factors of production, including labour, can be expanded in unlimited quantities.

The essential phenomenon that we wish to grasp is this: goods are produced from each other (see equation (7) below) and we want to determine (*i*) which processes will be used; (*ii*) what the relative velocity will be with which the total quantity of goods increases; (*iii*) what prices will obtain; (*iv*) what the rate of interest will be. In order to isolate this phenomenon completely we assume furthermore:

(*d*) Consumption of goods takes place only through the processes of production which include necessities of life consumed by workers and employees.

In other words we assume that all income in excess of necessities of life will be reinvested.

It is obvious to what kind of theoretical models the above assumptions correspond.

2. In each process P_i ($i = 1, \ldots, m$) quantities a_{ij} (expressed in some units) are used up, and quantities b_{ij} are produced, of the respective goods G_j ($j = 1, \ldots, n$). The process can be symbolised in the following way:

$$P_i : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, G_j \rightarrow \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, G_j \qquad (1)$$

It is to be noted:

(*e*) Capital goods are to be inserted on both sides of (1); wear and tear of capital goods are to be described by introducing different stages of wear as different goods, using a separate P_i for each of these.

(*f*) Each process to be of unit time duration. Processes of longer duration to be broken down into single processes of unit duration introducing if necessary intermediate products as additional goods.

(*g*) (1) can describe the special case where good G_j can be produced only jointly with certain others, viz. its permanent joint products.

In the actual economy, these processes P_i, $i = 1, \ldots, m$, will be used with certain *intensities* x_i, $i = 1, \ldots, m$. That means that for the total production the quantities of equations (1) must be multiplied by x_i. We write symbolically:

$$E = \sum_{i=1}^{m} x_i\, P_i \qquad (2)$$

$x_i = 0$ means that process P_i is not used.

We are interested in those states where the whole economy expands without change of structure, i.e. where the ratios of the intensities $x_1 : \ldots : x_m$ remain unchanged, although $x_1, \ldots x_m$ themselves may change. In such a case they are multiplied by a common factor α per unit of time. This factor is the *coefficient of expansion of the whole economy.*

3. The numerical unknowns of our problem are: (*i*) the *intensities* $x_1, \ldots, x_m$ of the processes $P_1, \ldots, P_m$; (*ii*) the *coefficient of expansion* of the whole economy α; (*iii*) the *prices* $y_1, \ldots, y_n$ of goods $G_1, \ldots, G_n$; (*iv*) the interest factor β $(= 1 + \frac{z}{100}$, z being the rate of interest in % per unit of time. Obviously:

$$x_i \geqq 0, \qquad (3) \qquad\qquad y_j \geqq 0, \qquad (4)$$

and since a solution with $x_1 = \ldots = x_m = 0$, or $y_1 = \ldots = y_n = 0$ would be meaningless:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i > 0, \quad \ldots\ldots (5) \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j > 0, \quad \ldots\ldots (6)$$

The economic equations are now:

$$\alpha \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_i \leqq \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\, x_i, \quad \ldots\ldots (7)$$

and if in (7) $<$ applies, $y_j = 0$ ....(7′)

$$\beta \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j \geqq \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, y_j, \quad \ldots\ldots (8)$$

and if in (8) $>$ applies, $x_i = 0$..................(8′)

The meaning of (7), (7′) is: it is impossible to consume more of a good G_j in the total process (2) than is being produced. If, however, less is consumed, i.e. if there is excess production of G_j, G_j becomes a free good and its price $y_j = 0$.

The meaning of (8), (8′) is: in equilibrium no profit can be made on any process P_i (or else prices or the rate of interest would rise—it is clear how this abstraction is to be understood). If there is a loss, however, i.e. if P_i is unprofitable, then P_i will not be used and its intensity $x_i = 0$.

The quantities a_{ij}, b_{ij} are to be taken as given, whereas the x_i, y_j, α, β are unknown. There are, then, $m + n + 2$ unknowns, but since in the case of x_i, y_j only the ratios $x_1 : \ldots : x_m$, $y_1 : \ldots : y_n$ are essential, they are reduced to $m + n$. Against this, there are $m + n$ conditions (7) + (7′) and (8) + (8′). As these, however, are not equations, but rather complicated inequalities, the fact that the number of conditions is equal to the number of unknowns does not constitute a guarantee that the system can be solved.

The dual symmetry of equations (3), (5), (7), (7′) of the variables x_i, α and of the concept "unused process" on the one hand, and of equations (4), (6), (8),)8′) of the variables y_j, β and of the concept "free good" on the other hand seems remarkable.

4. Our task is to solve (3)—(8′). We shall proceed to show:

Solutions of (3)—(8′) *always exist,* although there may be several solutions with different $x_1 : \ldots : x_m$ or with different $y_1 : \ldots : y_n$. The first is possible since we have not even excluded the case where several P_i describe the same process or where several P_i combine to form another. The second is possible since some goods G_j may enter into each process P_i only in a fixed ratio with some others. But even apart from these trivial possibilities there may exist—for less obvious reasons—several solutions $x_1 : \ldots : x_m$, $y_1 : \ldots : y_m$. Against this it is of importance that α, β should have the same value for all solutions; i.e. α, β *are uniquely determined.*

We shall even find that α and β can be directly characterised in a simple manner (see paragraphs 10 and 11).

To simplify our considerations we shall assume that always:

$$a_{ij} + b_{ij} > 0 \quad \ldots\ldots (9)$$

(a_{ij}, b_{ij} are clearly always $\geqq 0$). Since the a_{ij}, b_{ij} may be arbitrarily small this restriction is not very far-reaching, although it must be imposed in order to assure uniqueness of α, β as otherwise W might break up into disconnected parts.

Consider now a hypothetical solution x_i, α, y_j, β of (3)—(8′). If we had in (7) always $<$, then we should have always $y_j = 0$ (because of (7′)) in contradiction to (6).

If we had in (8) always $>$ we should have always $x_i = 0$ (because of (8′)) in contradiction to (5). Therefore, in (7) $\leqq$ always applies, but $=$ at least once; in (8) $\geqq$ always applies, but $=$ at least once.

In consequence:

$$\alpha = \underset{j=1,\ldots,n}{\text{Min.}} \left[\frac{\sum_{i=1}^{m} b_{ij}\ x_i}{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\ x_i} \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(10)},$$

$$\beta = \underset{i=1,\ldots,m}{\text{Max.}} \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\ y_j}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ y_j} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(11)}.$$

Therefore the x_i, y_j determine uniquely α, β. (The right-hand side of (10), (11) can never assume the meaningless form $\frac{0}{0}$ because of (3)—(6) and (9)). We can therefore state (7) + (7′) and (8) + (8′) as conditions for x_i, y_j only:

$y_j = 0$ for each $j = 1, \ldots, n$, for which:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} b_{ij}\ x_i}{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\ x_i}$$

does not assume its minimum value (for all $j = 1, \ldots, n$) . . . (7*).

$x_i = 0$ for each $i = 1, \ldots, m$, for which:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\ y_i}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ y_i}$$

does not assume its maximum value (for all $i = 1, \ldots, m$) . . . (8*).

The $x_1, \ldots, x_m$ in (7*) and the $y_1, \ldots, y_n$ in (8*) are to be considered as given. We have, therefore, to solve (3)—(6), (7) and (8) for x_i, y_j.

5. Let X' be a set of variables $(x'_1, \ldots, x'_m)$ fulfilling the analoga of (3), (5):

$$x'_i \geqq 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (3') \qquad \sum_{i=1}^{m} x'_i > 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (5')$$

and let Y' be a series of variables $(y'_1, \ldots, y'_n)$ fulfilling the analoga of (4), (6):

$$y'_j \geqq 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (4') \qquad \sum_{j=1}^{n} y'_j > 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (6')$$

Let, furthermore,

$$\phi(X'_i,\ Y'_i) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\ x'_i\ y'_j}{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x'_i\ y'_j} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(12)}$$

Let $X = (x_1, \ldots, x_m)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ the (hypothetical) solution, $X' = (x'_1, \ldots, x'_m)$, $Y' = (y'_1, \ldots, y'_n)$ to be freely variable, but in such a way that (3)—(6) and (3')—(6') respectively are fulfilled; then it is easy to verify that (7*) and (8*) can be formulated as follows:

$\phi(X, Y')$ assumes its minimum value for Y' if $Y' = Y$...... (7**).

$\phi(X', Y)$ assumes its maximum value for X' if $X' = X$...... (8**).

The question of a solution of (3)—(8') becomes a question of a solution of (7**), (8**) and can be formulated as follows:

(*) *Consider (X', Y') in the domain bounded by (3')—(6'). To find a saddle point $X' = X$, $Y' = Y$, i.e. where (X, Y') assumes its minimum value for Y', and at the same time (X', Y) its maximum value for Y'.*

From (7), (7*), (10) and (8), (8*), (11) respectively, follows:

$$\alpha = \frac{\sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{m} b_{ij}\, x_i \right] y_j}{\sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_i \right] y_j} = \phi(x, y) \text{ and } \beta = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, y_j \right] x_i}{\sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j \right] x_i} = \phi(x, y)$$

respectively.

Therefore:

(**) *If our problem can be solved, i.e. if $\phi(X', Y')$ has a saddle point $X' = X$, $Y' = Y$ (see above), then:*

$\alpha = \beta = \phi\,(X,Y) =$ *the value at the saddle point*............ (13)

6. Because of the homogeneity of $\phi\,(X', Y')$ (in X', Y', i.e. in $x', \ldots, x_m'$ and $y_1', \ldots y_m'$) our problem remains unaffected if we substitute the normalisations

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \ldots\ldots (5^*) \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \ldots\ldots (6^*)$$

for (5'), (6') and correspondingly for (5), (6). Let S be the X' set described by:

$$x_i' \geqq 0, \ldots\ldots (3') \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i' = 1, \ldots\ldots (5^*)$$

and let T be the Y' set described by:

$$y_j' \geqq 0, \ldots\ldots (4') \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j' = 1, \ldots\ldots (6^*)$$

(S, T are simplices of, respectively, $m - 1$ and $n - 1$ dimensions).

In order to solve[1] we make use of the simpler formulation (7*), (8*) and combine these with (3), (4), (5*), (6*) expressing the fact that $X = (x_1, \ldots, x_m)$ is in S and $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ in T.

7. We shall prove a slightly more general lemma: Let R_m be the m-dimensional

[1] The question whether our problem has a solution is oddly connected with that of a problem occurring in the Theory of Games dealt with elsewhere. (Math. Annalen, 100, 1928, pp. 295–320, particularly pp. 305 and 307–311). The problem there is a special case of (*) and is solved here in a new way through our solution of (*) (see below). In fact, if $a_{ij} \equiv 1$, then $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x'_i\, y'_j = 1$ because of (5*), (6*). Therefore $\phi\,(X', Y') = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, x'_i\, y'_j$, and thus our (*) coincides with loc. cit., p. 307. (Our $\phi\,(X', Y')$, b_{ij}, x'_i, y'_j, m, n here correspond to $h\,(\xi, \eta)$, a_{pq}, ξ_p, η_q, $M + 1$, $N + 1$ there).

It is, incidentally, remarkable that (*) does not lead—as usual—to a simple maximum or minimum problem, the possibility of a solution of which would be evident, but to a problem of the saddle point or minimum-maximum type, where the question of a possible solution is far more profound.

space of all points $X = (x_1, \ldots, x_m)$, R_n the n-dimensional space of all points $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, R_{m+n} the $m + n$ dimensional space of all points $(X, Y) = (x_1, \ldots x_m, y_1, \ldots, y_n)$.

A set (in R_m or R_n or R_{m+n}) which is *not empty, convex closed and bounded* we call a set C.

Let S°, T° be sets C in R_m and R_n respectively and let $S^\circ \times T^\circ$ be the set of all (X, Y) (in R_{m+n}) where the range of X is S° and the range of Y is T°. Let V, W be two closed subsets of $S^\circ \times T^\circ$. For every X in S° let the set $Q\ (X)$ of all Y with (X, Y) in V be a set C; for each Y in T° let the set $P\ (Y)$ of all X with (X, Y) in W be a set C. Then the following lemma applies.

Under the above assumptions, V, W have (at least) one point in common.

Our problem follows by putting $S^\circ = S$, $T^\circ = T$ and $V =$ the set of all $(X, Y) = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ fulfilling (7*), $W =$ the set of all $(X, Y) = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ fulfilling (8*). It can be easily seen that V. W are closed and that the sets $S^\circ = S$, $T^\circ = T$, $Q\ (X)$, $P\ (Y)$ are all simplices, i.e. sets C. The common points of these V, W are, of course, our required solutions $(X, Y) = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m)$.

8. To prove the above lemma let S°, T°, V, W be as described before the lemma.

First, consider V. For each X of S° we choose a point $Y^\circ\ (X)$ out of $Q\ (X)$ (e.g. the centre of gravity of this set). It will not be possible, generally, to choose $Y^\circ\ (X)$ as a continuous function of X. Let $\epsilon > 0$; we define:

$$w^\epsilon\ (X, X') = \text{Max.}\ (0,\ 1 - \frac{1}{\epsilon}\ \text{distance}\ (X, X')) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Now let $Y^\epsilon\ (X)$ be the centre of gravity of the $Y^\circ\ (X')$ with (relative) weight function $w^\epsilon\ (X, X')$ where the range of X' is S°. I.e. if $Y^\circ\ (X) = (y_1{}^\circ\ (x), \ldots, y_n{}^\circ\ (x))$, $Y^\epsilon\ (X) = (y_1{}^\epsilon\ (x), \ldots, y_n{}^\epsilon\ (x))$, then:

$$y_j{}^\epsilon\ (X) = \int_{S^\circ} w^\epsilon\ (X, X')\ y_j{}^\circ\ (X')\ dX' / \int_{S^\circ} w^\epsilon\ (X, X')\ dX', \ldots. \quad (15)$$

We derive now a number of properties of $Y^\epsilon\ (X)$ (valid for all $\epsilon > 0$):

(*i*) $Y^\epsilon\ (X)$ is in T°. Proof: $Y^\circ\ (X')$ is in $Q\ (X')$ and therefore in T°, and since $Y^\epsilon\ (X)$ is a centre of gravity of points $Y^\circ\ (X')$ and T° is convex, $Y^\epsilon\ (X)$ also is in $T^\bullet$.

(*ii*) $Y^\epsilon\ (X)$ is a continuous function of X (for the whole range of S°). Proof: it is sufficient to prove this for each $y_j{}^\epsilon\ (X)$. Now $w^\epsilon\ (X, X')$ is a continuous function of X, X' throughout; $\int_{S^\circ} w^\epsilon\ (X, X')\ dX'$ is always > 0, and all $y_j{}^\circ\ (X)$ are bounded (being co-ordinates of the bounded set S°). The continuity of the $y_j{}^\epsilon\ (X)$ follows, therefore, from (15).

(*iii*) For each $\delta > 0$ there exists an $\epsilon_0 = \epsilon_0\ (\delta) > 0$ such that the distance of each point $(X, Y^{\epsilon_0}\ (X))$ from V is $< \delta$. Proof: assume the contrary. Then there must exist a $\delta > 0$ and a sequence of $\epsilon_\nu > 0$ with $\lim_{\nu \to \infty} \epsilon_\nu = 0$ such that for every $\nu = 1, 2, \ldots$ there exists a X_ν in S° for which the distance $(X_\nu, Y^{\epsilon_\nu}\ (X_\nu))$ would be $\geqq \delta$. A fortiori $Y^{\epsilon_\nu}\ (X_\nu)$ is at a distance $\geqq \frac{\delta}{2}$ from every $Q\ (X')$, with a distance $(X_\nu, X') \leqq \frac{\delta}{2}$.

All X_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, are in S° and have therefore a point of accumulation X^* in S°; from which follows that there exists a subsequence of X_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, converging towards X^* for which distance $(X_\nu, X^*) \leqq \frac{\delta}{2}$ always applies. Substituting this subsequence for the ϵ_ν, X_ν, we see that we are justified in assuming: $\lim X_\nu = X^*$, distance $(X_\nu, X^*) \leqq \frac{\delta}{2}$. Therefore we may put $X' = X^*$ for every $\nu = 1, 2, \ldots$, and in consequence we have always $Y^{\epsilon_\nu}(X_\nu)$ at a distance $\geqq \frac{\delta}{2}$ from $Q(X^*)$.

$Q(X^*)$ being convex, the set of all points with a distance $< \frac{\delta}{2}$ from $(Q(X^*)$ is also convex. Since $Y^{\epsilon_\nu}(X_\nu)$ does not belong to this set, and since it is a centre of gravity of points $Y^\circ(X')$ with distance $(X_\nu, X') \leqq \epsilon_\nu$ (because for distance $(X_\nu, X') > \epsilon_\nu$, $w^{\epsilon_\nu}(X_\nu, X') = 0$ according to (14)), not all of these points belong to the set under discussion. Therefore: there exists a $X' = X_\nu$ for which the distance $(X_\nu, X'_\nu) \leqq \epsilon_\nu$ and where the distance between $Y^\circ(X'_\nu)$ and $Q(X^*)$ is $\geqq \frac{\delta}{2}$.

Lim $X_\nu = X^*$, lim distance $(X_\nu, X'_\nu) = 0$, and therefore lim $X'_\nu = X^*$. All $Y^\circ(Y_\nu)$ belong to T° and have therefore a point of accumulation Y^*. In consequence, (X^*, Y^*) is a point of accumulation of the $(X_\nu, Y^\circ(X_\nu))$ and since they all belong to V, (X^*, Y^*) belongs to V too. Y^* is therefore in $Q(X^*)$. Now the distance of every $Y^\circ(Y_\nu)$ including from $Q(X^*)$ is $\geqq \frac{\delta}{2}$. This is a contradiction, and the proof is complete.

(*i*)—(*iii*) together assert: for every $\delta > 0$ there exists a continuous mapping $Y_\delta(X)$ of S° on to a subset of T° where the distance of every point $(X, Y_\delta(X))$ from V is $< \delta$. (Put $Y_\delta(X) = Y^\epsilon(X)$ with $\epsilon = \epsilon_0 = \epsilon_0(\delta)$).

9. Interchanging S° and T°, and V and W we obtain now: for every $\delta > 0$ there exists a continuous mapping $X_\delta(Y)$ of T° on to a subset of S° where the distance of every point $(X_\delta(Y), Y)$ from W is $< \delta$.

On putting $f_\delta(X) = X_\delta(Y_\delta(X))$, $f_\delta(X)$ is a continuous mapping of S° on to a subset of S°. Since S° is a set C, and therefore topologically a simplex[1] we can use L. E. J. Brouwer's Fix-point Theorem[2]; $f_\delta(X)$ has a fix-point. I.e., there exists a X^δ in S° for which $X^\delta = f_\delta(X^\delta) = X_\delta(Y_\delta(X^\delta))$. Let $Y^\delta = Y_\delta(X^\delta)$, then we have $X^\delta = X_\delta(Y^\delta)$. Consequently, the distances of the point (X^δ, Y^δ) in R_{m+n} both from V and from W are $< \delta$. The distance of V from W is therefore $< 2\delta$. Since this is valid for every $\delta > 0$, the distance between V and W is $= 0$. Since V, W are closed and bounded, they must have at least one common point. This proves our lemma completely.

10. We have solved (7*), (8*) of paragraph 4 as well as the equivalent problem (*) of paragraph 5 and the original task of paragraph 3: the solution of (3)—(8′). If the x_i, y_j (which were called X, Y in paragraphs 7—9) are determined, α, β follow from (13) in (**) of paragraph 5. In particular, $\alpha = \beta$.

We have emphasised in paragraph 4 already that there may be several solutions x_i, y_j (i.e. X, Y); we shall proceed to show that there exists only one value of α (i.e. of β). In fact, let $X_1, Y_1, \alpha_1, \beta_1$ and $X_2, Y_2, \alpha_2, \beta_2$ be two solutions. From (7**), (8**) and (13) follows:

$$\alpha_1 = \beta_1 = \phi(X_1, Y_1) \leqq \phi(X_1, Y_2),$$
$$\alpha_2 = \beta_2 = \phi(X_2, Y_2) \geqq \phi(X_1, Y_2),$$

therefore $\alpha_1 = \beta_1 \leqq \alpha_2 = \beta_2$. For reasons of symmetry $\alpha_2 = \beta_2 \leqq \alpha_1 = \beta_1$, therefore $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2$.

[1] Regarding these as well as other properties of convex sets used in this paper, c.f., e.g. Alexandroff and H. Hopf, *Topologie*, vol. I, J. Springer, Berlin, 1935, pp. 598–609.

[2] Cf., e.g. 1 c, footnote 1, p. 480.

We have shown:

At least one solution X, Y, α, β exists. For all solutions:

$$\alpha = \beta = \phi\ (X,\ Y) \qquad (13)$$

and these have the same numerical value for all solutions, in other words: The interest factor and the coefficient of expansion of the economy are equal and uniquely determined by the technically possible processes $P_1, \ldots, P_m$.

Because of (13), $\alpha > 0$, but may be $\gtreqless 1$. One would expect $\alpha > 1$, but $\alpha \leqq 1$ cannot be excluded in view of the generality of our formulation: processes $P_1, \ldots, P_m$ may really be *unproductive*.

11. In addition, we shall characterise α in two independent ways.

Firstly, let us consider a state of the economy possible on purely technical considerations, expanding with factor α' per unit of time. I.e., for the intensities $x_1, \ldots, x_m$ applies:

$$x_i \geqq 0 \qquad (3') \qquad\qquad \sum_{i=1}^{m} x_i' > 0 \qquad (5') \text{ and}$$

$$\alpha' \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\ x_i' \leqq \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\ x_i' \qquad (7'')$$

We are neglecting prices here altogether. Let $x_i, y_j, \alpha = \beta$ be a solution of our original problem (3)—(8′) in paragraph 3. Multiplying (7″) by y_j and adding $\sum_{j=1}^{n}$ we obtain:

$$\alpha' \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_i'\ y_j \leqq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\ x_i'\ y_j,$$

and therefore $\alpha' \leqq \phi\ (X',\ Y)$. Because of (8**) and (13) in paragraph 5, we have:

$$\alpha' \leqq \phi\ (X',\ Y) \leqq \phi\ (X,\ Y) = \alpha = \beta \qquad (15).$$

Secondly, let us consider a system of prices where the interest factor β' allows of no more profits. I.e. for prices $y_1', \ldots y'_n$ applies:

$$y'_j \geqq 0, \qquad (4') \qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} y'_j > 0, \qquad (6') \text{ and}$$

$$\beta' \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ y'_j \geqq \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\ y'_j \qquad (8'')$$

Hereby we are neglecting intensities of production altogether. Let $x_i, y_j, \alpha = \beta$ as above. Multiplying (8″) by x_i and adding $\sum_{i=1}^{m}$ we obtain:

$$\beta' \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_i\ y'_j \leqq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\ x_i\ y'_j$$

and therefore $\beta' \geqq \phi\ (X,\ Y')$. Because of (7**) and (13) in paragraph 5, we have:

$$\beta' \geqq \phi\ (X,\ Y') \geqq \phi\ (X,\ Y) = \alpha = \beta \qquad (16)$$

These two results can be expressed as follows:

The greatest (purely technically possible) factor of expansion α' of the whole economy is $\alpha' = \alpha = \beta$, neglecting prices.

The lowest interest factor β' at which a profitless system of prices is possible is $\beta' = \alpha = \beta$, neglecting intensities of production.

Note that these characterisations are possible only on the basis of our knowledge that solutions of our original problem exist—without themselves directly referring to this problem. Furthermore, the equality of the maximum in the first form and the minimum in the second can be proved only on the basis of the existence of this solution.

Princeton, N.J. J. v. NEUMANN.

A Note on J. v. Neumann's Article on "A Model of Economic Equilibrium"
Author(s): D. G. Champernowne
Source: *The Review of Economic Studies*, Vol. 13, No. 1 (1945 - 1946), pp. 10-18
Published by: The Review of Economic Studies Ltd.
Stable URL: http://www.jstor.org/stable/2296112
Accessed: 21/09/2009 15:09

A Note on J. v. Neumann's Article on "A Model of Economic Equilibrium"[1]

SCOPE OF THE PAPER

The supreme merit of this paper lies in the elegance of the mathematical solution of a highly generalised problem in theoretical economics. But the paper is of considerable interest to economists as well as to mathematicians, because it deals simultaneously with questions on several fields of economics, which until this paper was first read, (in 1932) had seldom been considered together as parts of one problem. For example, in this short paper the author considers which goods will be free goods, and the determination of the prices of goods which are not free : at the same time he examines which productive processes and scales of production will be optimum and which will be unprofitable : he also examines the degree in which each optimum process will be used and the relative amounts of different goods that will be produced. At the same time he demonstrates the mechanism which determines the rate of interest and the rate of expansion of the whole economy.

Approaching these questions as a mathematician, Dr. Neumann places emphasis on rather different aspects of the problem than would an economist. Whereas he takes great care to give an absolutely rigorous mathematical argument and to state his assumptions completely and without ambiguity, he develops his points with the minimum of descriptive explanation. The paper is logically complete and admirably concise. In contrast to the convention among mathematical writers of reducing explanations to a minimum and stating assumptions as concisely as possible, economists more usually provide illustrative examples and repetitions of their argument to ease the reader's task of comprehension. Those accustomed to these less austere conventions may therefore be interested to read the following discursive commentary which develops some of the points of economic interest in Dr. Neumann's classic article.

By adopting extremely artificial assumptions, the author rendered his problem soluble and concentrated attention on some very interesting properties of the actual economic system. But at the same time this process of abstraction inevitably made many of his conclusions inapplicable to the real world : others could be applied only after considerable modifications. It is interesting to enquire how far the properties in his simplified model do correspond to similar phenomena in the real world.

THE APPROACH TO THE PROBLEM

Prof. v. Neumann's method is the familiar one of examining the conditions of equilibrium of his simplified model of the economic world. The first point is to get clear what is meant by equilibrium. The definition of equilibrium is very similar to that of the economist's stationary state : but in v. Neumann's article equilibrium differs from a stationary state's equilibrium in the vital respect that a uniform expansion of the whole system is allowed under equilibrium. Such a state of equilibrium may be called a quasi-stationary state, although v. Neumann does not in fact use this term.

From the point of view of the mathematician, the most important result of the article is the proof that under the simplified conditions there assumed, it will be possible for the model to have any equilibrium position at all, in the sense in which equilibrium

[1] This note is the outcome of conversations with Mr. N. Kaldor, to whom many of the ideas in it are due. I am also indebted to Mr. P. Sraffa of Cambridge and to Mr. Crum of New College, Oxford, for instruction in subjects discussed in this article.

is there defined. This may seem rather surprising, as one is rather apt to investigate conditions of equilibrium without bothering first of all to find out whether any equilibrium position need actually exist at all : one is liable to assume that some equilibrium position is possible. The fact that it is necessary to prove the existence of an equilibrium position before finding out the properties of such a position may be illustrated by the following consideration. Although v. Neumann defines equilibrium to be that of a quasi-stationary state, which may be expanding, he might perhaps have chosen to define equilibrium to be that of a stationary state without expansion or contraction. It so happens that the simplifying assumptions made about his economic model make it impossible in general for it to settle down to a state of stationary equilibrium : if, therefore, he had assumed that such a stationary equilibrium position was possible and had investigated the various conditions which the system must satisfy when in equilibrium, he would evidently have arrived at ridiculous results. For similar reasons, it was therefore necessary for him to prove that there was at least one possible position of quasi-stationary state equilibrium, before it was of any use investigating the properties which the system must have in such an equilibrium position.

Although, to the mathematician, the most interesting part of this paper will be that which proves the existence of at least one equilibrium position ; for the economist the most interesting part is that which analyses the properties of the system when it is in equilibrium. Fortunately, once the existence of an equilibrium position has been demonstrated, the arguments demonstrating the nature of this equilibrium are of quite an elementary nature, and it is possible to translate the rigorous mathematics of this part of the article into a somewhat looser form of words more readily digestible by those who are unused to thinking in terms of symbols.

Before turning to these arguments, it is useful to examine the manner in which v. Neumann approaches the economic problem. As we have seen, he is concerned not with short period problems but with the properties of the economic system when it has settled down to an equilibrium position which may be described as a quasi-stationary state. In such a state, all prices remain constant, the production of all goods remains in the same proportion although a uniform geometric rate of growth is allowed to the whole system. Thus if in any period the output of one particular good doubles, so then does the output of every other good double in that period, and the population and quantity of each kind of capital equipment double also in the same period. Thus in equilibrium there is no progress or change in production per head of population : growth merely consists of replication and the economic system expands like a crystal suspended in a solution of its own salt. The composition of any given volume of the crystal is at all times the same. To describe a system with uniform expansion of this kind we have introduced the term quasi-stationary state.

The model, being concerned only with a quasi-stationary state, can throw no direct light on problems of economic development and changes in the standard of living. The model has only one advantage over the strictly stationary state and that is that the community has an outlet for its savings in providing for the uniform expansion of the community and its stock of equipment.

In order to make it possible for quasi-stationary state equilibrium to exist in the model, several drastic simplifying assumptions had to be introduced. Constant returns were assumed in the sense that any economic process could be carried out at half, double, or in general x times its given scale, without any increase in costs per unit of output. Conditions of perfect competition in the long period were also assumed, and it was supposed that the natural factors of production (including labour) were available in unlimited quantities. One other very important assumption was implied, although it was nowhere very clearly stated : this was that no saving was carried out by the workers whereas the propertied class saved the whole of their income. These various simplifying assumptions, although necessary if a rigorous proof of the existence of equilibrium was to be possible, evidently render the model unsuitable for examining problems connected with monopoly, economies of mass production, technical progress, or with land.[1] Since monetary problems are also assumed away, the reader may begin to wonder in what way the model has interesting relevance to conditions in the real world.

Prof. v. Neumann's model does however exhibit certain features of a competitive capitalist economy which tend to be obscured in the more traditional approach and can deal with the consequences of the circular nature of the production process (*i.e.* that commodities are largely produced out of each other) in a way that is not possible under it. By reducing the role of the worker-consumer to that of a farm animal, he can focus attention on those parts of the mechanism determining prices and the rate of interest, which depend on supply conditions alone and not on the tastes of consumers. This emphasis is important because the orthodox analysis has distributed attention evenly between marginal utility and conditions of supply ; since supply is often more elastic than demand, prices in the long run do over a wide field reflect contrasts in cost rather than conditions of consumers' demands: a price-theory focussing attention on costs can give a very clear and yet an approximately true account. We may first consider v. Neumann's approach to the problem of prices.

Consider a good which may be manufactured out of a lot of other goods : in the simplified conditions of the model the cost price of the good will consist of the values of the goods of which it is composed plus an interest charge on the fixed and working capital involved in the process. If a good is a joint product, then the value of the other products must be subtracted from the cost in arriving at the cost price of the good. Competition will ensure that where a good may be produced by many different processes, its cost price will correspond to the costs in the cheapest process.

Wage costs are not considered as such, for labourers are not separately considered any more than are farm animals. It is supposed that they will do their work in return for rations of shelter, fuel, food and clothing, just as a horse works when it is fed and cared for. The costs of labour thus consist of the goods which maintain the workers, just as the costs of a horse's work consist of his fodder, stabling, etc. The essential point about v. Neumann's theory of prices is that goods are made out of goods alone and that the cost price of any good or collection of goods consists of the value of the goods from which they are made plus an interest charge.

Prof. v. Neumann's approach to the theory of the rate of interest is interesting. He makes no reference to marginal products or to the marginal efficiency of capital : nor does he regard the rate of interest as depending on the relative efficiency of production processes involving different " periods of production " : the rate of interest is not determined as the supply price of waiting, abstinence or saving, for it is assumed that the propertied class save all their income and that the working class consume all theirs. Nor is the rate of interest determined as the measure of liquidity preference, for money as such plays no part in v. Neumann's article. The rate of interest appears as the natural and optimum rate of organic expansion[2] of the system, and depends on the technical processes of production which are available. If these processes enable the system to expand at 5 per cent per annum at most, then 5 per cent per annum will be the rate of interest.

In its concern with a quasi-stationary state, in its theory of prices as determined

[1] By assuming both constant returns and perfect competition, v. Neumann also implies that the division of the total output (by means of a given process) between firms (using that process) is indeterminate.

[2] See pp. 14–15 for a fuller explanation of this concept.

by the minimum cost of goods made from other goods alone, and in its theory of the rate of interest determined by the greatest possible rate of expansion of the economic system, this paper approaches the problems of economics in an extremely original and stimulating fashion : it can claim, quite apart from the beautiful mathematical proof of the existence of an equilibrium position, to make a substantial contribution to the economic theory of interest, prices and production.

THE PROOF OF THE PROPERTIES OF THE SYSTEM IN EQUILIBRIUM

It would not be profitable to comment on the large part of the paper which deals with the proof of the existence of an equilibrium, since the argument is essentially one of advanced mathematics which cannot be economically expressed in words. But those readers who prefer to think in words rather than symbols may be interested in the following comments on v. Neumann's proof of the properties of the economic system in equilibrium.

Prof. v. Neumann defines a process of production as an operation lasting for one unit of time which converts one bundle of goods into another bundle of goods. He includes the fixed capital equipment used both in the bundle of goods which is converted and again in the bundle of goods which emerges from the operation. He supposes that there are available always a very large number of possible production processes, and that constant returns prevail in the sense that any operation can be carried out at any scale without affecting the relation of the output to the input. In any given process of production, the relative quantities of goods put in are absolutely fixed, and so are the relative quantities of the goods emerging from it : thus the only way in which an entrepreneur can alter the proportions between the goods which he uses is to change from one process of production to another : similarly he must do this in order to change the proportion of goods in his output. What would normally be regarded as two different forms of the same process of production, the one involving slightly different proportions of the factors of production than the other, is thus treated by v. Neumann as being two different processes of production.

It is fairly obvious that with given prices, some production processes are likely to be more profitable than others, in the sense that they could afford to pay a higher rate of interest without making losses. One of v. Neumann's conditions for equilibrium is in fact that every process in use should make zero profits : for under perfect competition, positive profits would attract competitors to use the same process and negative profits would deter people from using the process at all. He thus obtains the following rule for equilibrium :

> *Profitability Rule.*—Only those processes will be used which, with the actual prices and rate of interest, yield zero profits after payment of interest. These processes will be the most profitable ones available.

The second part of the rule follows from the fact that if there were any processes which could earn positive profits they would not have continued out of use under competition.

The usual point of view in economic theory is that free goods play no part in the economic system : but part of v. Neumann's problem is to determine which goods will be free goods in equilibrium. It is an essential property of his equilibrium that the physical outputs of all goods, whether free or not, remain in the same proportions to each other throughout time : so do the physical inputs. Suppose that the system in equilibrium is expanding by k per cent per unit of time : then the input of each good at any moment must be exactly k per cent greater than the input for the previous unit of time. Clearly this can only continue indefinitely if the output of every good is at least k per cent greater than the input of every good, since the source of the input at any moment is simply the output of the previous unit of time. But there may be goods for which the output exceeds the input by more than k per cent : there will then be more than enough of these goods to supply the input of the next moment of time, and if the equilibrium continues it is clear that in the case of these goods, larger and larger surplus stocks will be built up. v. Neumann concludes that the prices of these goods can only remain in equilibrium if they have become free goods in the sense that these prices are zero. Hence he obtains his rule about free goods :

> *Free goods rule.*—In an equilibrium production system, those goods whose output exceeds their input by more than the expansion rate of k per cent will be free goods. Only those goods whose output exceeds their input by the minimum, namely k per cent, will have prices (other than zero).

Prof. v. Neumann is also able to tell us quite a lot about the relative intensities with which the various profitable processes will be used. We may refer to the organisation of processes of production in any given proportions as being a system of production. We may define the expansion rate of any given system of production in terms of the relation of the output to the input of the various goods. We may, in short, define the rate of expansion of the system to be equal to the least rate of expansion of any good involved in the system. For instance, if there is a good whose output under the system exceeds its input by 2 per cent, and if there is no good whose output under the system exceeds its input by less than 2 per cent, then we say that the rate of expansion under this system is 2 per cent. Thus defined, the term rate of expansion may be applied to any production system whether it is in equilibrium or not.

Prof. v. Neumann obtains the following remarkable rule :

> *System of production rule.*—In equilibrium, the system of production actually used will have the greatest rate of expansion of all possible productive systems.

It should be noticed that this comprehensive rule does not involve prices at all : it shows that the system of production actually used has a maximum property depending only on what processes of production are in fact available.

A little reflection will confirm the validity of the rule. The reason for it is roughly this : if any system of production with a higher expansion rate were available, then it would pay all entrepreneurs to adopt this other system in place of the processes they are supposed to be using in equilibrium, and in this case the equilibrium could not continue. This point requires further explanation. In the conditions of the model, the input of any process is the same as the capital involved in the process : interest payments have to be made out of the excess of the value of output over the value of input. A little reflection will confirm that the rate of interest which any process can afford to pay per unit of time must therefore be the percentage by which the value of its output exceeds the value of its input. In equilibrium, we know that each process makes zero profits and hence that each process used can just afford to pay the actual rate of interest. It follows that in every process actually used the value of output exceeds the value of input by exactly the rate of interest. From this it follows in turn that the value of output for the system as a whole in equilibrium exceeds the value of input by a proportion equal to the rate of interest : in other words, the rate of expansion of the system is equal to the rate of interest. This equilibrium rate of interest is, as we have seen, the maximum rate of interest which the equilibrium system can afford to pay. Suppose that there were some other system with a larger rate of expansion, then it is clear that it could afford to pay a higher rate of interest : since it is open to any entrepreneur to adopt this other production system, he would be able to make a profit by so doing because he would then be able to afford more than the actual rate of interest : equilibrium would therefore be impossible if there were any other production system with a rate of expansion greater than that of the actual production system. That is why in equilibrium the actual production system must have the greatest possible rate of expansion, as stated in the system-of-production rule.

In the course of this argument we have incidentally demonstrated another of v. Neumann's results which may be summed up in the following rule :

> *Rate of interest rule.*—In equilibrium, the rate of interest equals the rate of expansion.

We still need to obtain a rule for determining the system of prices under equilibrium. The only result about prices which we have so far considered is that which gives the price of one good in terms of the prices of other goods : this in itself is not immediately helpful if we suppose the prices of all goods to be unknown. In order to understand the rule which prices must obey in equilibrium, it is useful to consider a new concept. This concept is the rate of interest possible under a given system of prices. With given prices, any particular production process will be able to pay a rate of interest equal to the percentage excess of the value of its output with those prices over the value of its input. In particular, with these prices, there will be one or more production processes which can afford to pay a rate of interest higher than can any other production processes. This particular rate of interest will be called the rate of interest possible under the given system of prices. The rule for determining prices may be set out in the following terms* :

> *Price system rule.*—The price system in equilibrium will have a possible rate of interest smaller than or as small as that of any other price system.

The reader will notice that this rule is closely analogous to the production system rule. Its validity may be confirmed by the following argument. In equilibrium, we have seen that the production system actually used must have an expansion rate equal to the actual rate of interest : it follows that the actual production system could afford to pay at least the actual rate of interest, whatever system of prices were ruling.[1] *A fortiori*, whatever the price system might be, at least one of the production processes actually used would be able to afford at least the actual rate of interest. This implies that no price system can have a possible rate of interest less than the actual rate of interest ruling in an equilibrium position. This result is embodied in the price system rule given above.

ECONOMIC IMPLICATIONS OF THE RESULTS

Since v. Neumann's results only relate to a quasi-stationary state, the utmost caution is needed in drawing from them any conclusions about the determination of prices, production or the rate of interest in the real world. Since, in the real world, land is limited in supply, the only possible quasi-stationary state is a strictly stationary state (or conceivably a contracting state[2]) : for an expanding quasi-stationary state would eventually be confronted with a shortage of land and its equilibrium would be destroyed. Hence v. Neumann's " quasi-stationary " state does not in fact bring his model any nearer to reality than would be the case with a strictly stationary state.

In spite of this v. Neumann's results are highly suggestive ; and it is interesting to explore in what respects the operation of his model may be relevant to the real world.

* Prof. v. Neumann does not use this particular rule in his article: He does, however, use the property that given the equilibrium intensities of the processes of production, the ratio of the value of the system's output to that of its input will be a minimum with respect to prices.

[1] This follows almost immediately from the definition of the expansion rate of a production system.

[2] Allowing for the existence of exhaustible resources, *e.g.* minerals, or for a system unable to provide the subsistence wages of the workers except by using up its stocks.

(1) As a first example, we may take the property that competition will ensure that equilibrium can only be reached if the maximum technically possible rate of expansion is achieved. This may immediately suggest an argument in favour of free enterprise in the real world. But quite apart from the point already mentioned that in a world with non-augmentable resources like land the maximum rate of expansion that is ultimately possible is zero (and hence competition would merely lead to an equilibrium position with no growth or contraction and with a zero rate of interest) the claim is strictly valid only if, as in v. Neumann's model, there is a slave-system and the object of production is mere enlargement without any advance in the standard of living. v. Neumann's model certainly does not suggest that competition secures the highest possible standard of living or the greatest possible rate of advance for living standards : for, on the assumptions of his model, the living standard is simply the minimum needed to persuade people to work.

(2) This point brings us to a second interesting implication of v. Neumann's results. He has successfully constructed an economic model in which the equilibrium level for real wages is simply whatever is needed to persuade people to work : it does not apparently depend on what industry can " afford to pay ". Suppose that the working-class effectively insists on a higher real wage, then this has the effect of increasing the input needed in any process (to secure a given output) by the amount of the extra fodder which the workers demand. Hence, there will be a change in the equilibrium conditions, and the position of quasi-stationary equilibrium will change to one with a lower rate of interest and a lower rate of expansion. This might suggest an argument for vigorous trade union activity : for in the model the result of standing out for higher real wages is to secure higher living standards at the expense of the owners of property : it is true that it is also at the expense of the rate of expansion of the system, but that is because in the model it is assumed that the propertied class save the whole of their income ; in the real world, where the propertied class also consume, it may be obtained at the expense of the consumption of the propertied class. Such an argument is suggested, but it is not certain whether it could be developed by means of any simple extension of the model.

(3) The question of consumption by the propertied class is also relevant to the theory of the rate of interest. The rate of interest will be determined as the greatest rate of expansion possible if all income from property is saved. A *rigorous* proof of this proposition is only possible if we assume that all income from property is in fact saved : this could happen, for example, if all property was owned by the State. On the other hand, even if part of the income from property were spent on consumption, and not saved, the rate of interest would not necessarily be much affected : it might still be *approximately* equal to the greatest expansion rate that *would* have been possible *if* all income from property had been saved. At the same time, the spending of part of the income from property would, of course, reduce the actual rate of expansion of the system ; this would now be well below the rate of interest and the maximum possible expansion rate.[1]

(4) An interesting feature of the model is that both prices and the outputs of the individual commodities are determined solely by the technical conditions of production. As was explained above, v. Neumann has proved (*a*) that competition will allow the system to be in equilibrium only if the five rules given above on pp. 13–15 are satisfied: these five rules of competitive equilibrium determine both the intensities of production of the individual commodities and their relative prices where all production processes

[1] The equality of the rate of interest and the rate of expansion in the model is, in fact, (once the existence of an equilibrium is proved) fairly obvious on the assumption that workers spend all their income and capitalists save all theirs.

are given. The model, it is true, ignores the possibility of increasing returns in the production of individual commodities, and does not allow for consumers' choice as an independent factor in the direction of productive activity. There is no room in the theory for an increase in population to make books cheaper and for a shift in demand from cotton to wool and from mutton to beef to send wool prices up and mutton prices down. But the important point is that these may conveniently be considered as the " special cases " of price-theory, to be introduced in the *second approximation* ; and not, as is common in traditional economics, at the centre of the theory. For the basic influences determining equilibrium prices v. Neumann's model provides a novel approach ; here, perhaps for the first time, is a self-contained theory of the determination of prices, ignoring the second approximation.

The role played by consumers' tastes in the determination of prices is suggested by considering how consumers' choice may be introduced into v. Neumann's model. The method is to allow several alternative production processes for obtaining " labour ", each process requiring a different bundle of goods as " real wages ", between which the labourer may be supposed indifferent. A change in the labourers' tastes will then be reflected in a change in the input required in the various processes producing " labour " : this in turn will react on the equilibrium position of the system and hence on relative prices. But the latter effect may be trivial, even if the change in tastes is significant ; and one is left with the impression that consumers' tastes play, in fact, a comparatively minor role in the determination of equilibrium prices.

It may be objected that the assumption that the propertied class save the whole of their income further restricts the scope which " marginal utility " can play in the determination of prices. This may be granted ; but this restriction is not so serious as it may appear to be : indeed the novelty of the distribution of emphasis which it implies is, from some points of view, an advantage. For even in the actual world the great bulk of productive activity (as measured, for example, by the distribution of labour between industries) is devoted to the production of intermediary products of one sort or another, which are mainly used as inputs in a series of other products. The prices (and relative outputs) of these intermediary goods can best be explained in terms of the considerations covered in v. Neumann's model.[1]

(5) Land is assumed by v. Neumann to be available in unlimited quantities. It is, however, possible to introduce land into his model by including the land used both in the input and the output of each process using it. In this case, since the quantity of " land " cannot be increased (or decreased), equilibrium is only possible in a stationary state. In such a state, the rate of interest will be zero and the workers will get the whole income. This suggests that if the assumption that all property income is saved is abandoned, the equilibrium in a system containing land may be a stationary state with a positive rate of interest and all income consumed. During the approach to this equilibrium the rate of interest will presumably fall as the increasing scarcity of land lowers the *potential* rate of expansion, and the *actual* rate of expansion may fall even faster owing to monetary complications. These considerations take us however, outside the assumptions made by v. Neumann, and away from the possibility of rigorous proof.

(6) In a world where the scarcity of non-augmentable resources exerts a major influence on the productive system, v. Neumann's model ceases to be so interesting. But even ignoring the complications due to " land ", there is still danger of another kind of complication. The rate of expansion of the system is determined, as we have

[1] And even in the case of final-consumers' goods, the prices (though not of course the relative intensities of production) are *largely* to be explained by the technical conditions of production, rather than " marginal utility ". (The exceptions being joint products, or commodities with largely increasing or decreasing cost.)

seen, by the goods whose supply can be expanded least rapidly. These may well be those goods which are created largely out of themselves, (*i.e.* in whose production processes input and output mainly consist of the same commodities), as, for example, whales or mathematical wranglers. The point of these examples is that the commodities with the lowest rate of expansion may be trivial goods. Yet, if it is impossible for the expansion of these goods to keep pace with the rest of commodities, it is they who, on v. Neumann's model, will rule the roost and determine the rate of expansion of the whole system !

The reason for this unnatural result is that there is no room in the model for processes which do *not* involve whales and wranglers ! It is expressly assumed that every good is involved (either as input or as output) in every process. Hence it is not possible in the model to reduce below a certain proportion the part played in the economy by such goods as whales and wranglers, and eventually the expansion of the system must be slowed down to their own pace. v. Neumann states that his assumption that every good enters every process does not really matter because they may be supposed to do so in very small quantities ; nevertheless the implications of this assumption need bearing in mind.

(7) It should be noted that although in the model the equilibrium rate of interest is uniquely determined, the system of prices and outputs are not *uniquely* determined : there may be any number of possible equilibrium positions. But each must satisfy the rules set out in section 2 above.

The ease with which these rules could be established once the existence of an equilibrium position was known, was due to the choice of assumptions which enabled constant prices and stable relative outputs to exist together under competition. The whole process of mathematics would become greatly complicated if increasing returns or monopoly were introduced.

It will be noted, of course, that the " equilibrium " of v. Neumann's model is a very long run equilibrium ; it may take many decades or even centuries for the system to settle down to the rate of expansion of the least expandable goods ; and over this period, the basic assumption of known technical possibilities remaining unchanged loses all reality. An important question, therefore, is how far v. Neumann's results are applicable to systems which are only in an approach to equilibrium ; and any rigorous examination of the properties of such a system would be bound to be most complicated.

Yet it is in the problems of the approach to equilibrium that economists are most interested. How can a country acquire the equipment needed to achieve the best system of production ? What prices should be used in its accounting system by a planning authority seeking to make the best use of its resources ? Here is a fruitful field for extending the powerful methods developed in Prof. v. Neumann's paper.

Oxford. D. G. CHAMPERNOWNE.